

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 33

Хорновские логические программы:  
операционная семантика,  
SLD-вычисляемые ответы

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

# Вступление

Программа  $\mathcal{P}$ :

```
elem(X, X.L);  
elem(X, Y.L) ← elem(X, L);  
common(X, L1, L2) ← elem(X, L1), elem(X, L2);
```

Запрос  $\mathcal{Q}$ :

?common(X, **п.о.п.nil**, **к.л.о.п.nil**)

Правильными ответами на запрос  $\mathcal{Q}$  к программе  $\mathcal{P}$  являются подстановки

{X/**п**}

{X/**о**}

А как можно **получить** (**извлечь, вычислить**) эти ответы?

## ХЛП и хорновские дизъюнкты

$\text{elem}(X, X.L); \quad \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$   
 $\text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$   
 $? \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil})$

Согласно **декларативной семантике**, программа  $\mathcal{P}$  представляет собой систему **дизъюнктов-правил**

$$S_{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{array}{l} \forall X \forall L \text{ elem}(X, X.L), \quad \forall X \forall L \forall Y (\text{elem}(X, L) \rightarrow \text{elem}(X, Y.L)), \\ \forall X \forall L_1 \forall L_2 (\text{elem}(X, L_1) \& \text{elem}(X, L_2) \rightarrow \text{common}(X, L_1, L_2)) \end{array} \right\},$$

запрос  $Q$  представляет собой формулу

$$\Phi_Q = \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil}),$$

и правильность ответа  $\theta$  означает, что справедливо соотношение

$$S_{\mathcal{P}} \models \forall \dots (\Phi_Q \theta)$$

Формула  $\Phi_Q$  — это отрицание **дизъюнкта-запроса**:

$$D_Q = \neg \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil}) = \neg \Phi_Q$$

$$S_{\mathcal{P}} \models \forall \dots (\Phi_Q \theta) \quad \Leftrightarrow \quad S_{\mathcal{P}} \models \forall \dots (\neg D_Q \theta)$$

## ХЛП и хорновские дизъюнкты

$\text{elem}(X, X.L); \quad \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$   
 $\text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$   
 $? \text{common}(X, \text{п.о.п.nil}, \text{к.л.о.п.nil})$

$$S_{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{elem}(X, X.L), \quad \text{elem}(X, L) \rightarrow \text{elem}(X, Y.L), \\ \text{elem}(X, L_1) \ \& \ \text{elem}(X, L_2) \rightarrow \text{common}(X, L_1, L_2) \end{array} \right\}$$

$$S_{\mathcal{P}} \models \forall \dots (\Phi_Q \theta)$$

Способ извлечения требуемой подстановки  $\theta$  для получившихся системы дизъюнктов-правил и дизъюнкта-запроса был сформулирован в **теореме о входном резольютивном выводе**: достаточно построить входной вывод из  $S_{\mathcal{P}} \cup \{D_Q\}$ , инициированный дизъюнктом  $D_Q$ , и вычислить композицию подстановок этого вывода

Перепишем этот способ в терминах логических программ

# ХЛП и хорновские дизъюнкты

Результаты  $\mathcal{R}\theta$ ,  $\mathcal{Q}\theta$  применения подстановки  $\theta$  соответственно к правилу  $\mathcal{R} = A \leftarrow B_1, \dots, B_k$  и к запросу  $\mathcal{Q} = ?C_1, \dots, C_m$  определим так:

$$\mathcal{R}\theta = A\theta \leftarrow B_1\theta, \dots, B_k\theta;$$

$$\mathcal{Q}\theta = ?C_1\theta, \dots, C_m\theta$$

$\text{Var}_{\mathcal{R}}$  и  $\text{Var}_{\mathcal{Q}}$  — так обозначим все переменные, содержащиеся в правиле  $\mathcal{R}$  и в запросе  $\mathcal{Q}$

Терминология, относящаяся к применению подстановок к выражениям (вариант, пример, основной пример, основное правило, основной запрос), без изменений переносится с дизъюнктов на правила и запросы

## Утверждение

Для любых правил  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  и любой подстановки  $\theta$  верно:

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{R}'} = \Phi_{\mathcal{R}}\theta$$

## Утверждение

Для любых запросов  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q}'$  и любой подстановки  $\theta$  верно:

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{Q}'} = \Phi_{\mathcal{Q}}\theta \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\neg\mathcal{Q}'} = \Phi_{\neg\mathcal{Q}}\theta$$

# Правило SLD-резолюции

Пусть

- ▶  $Q = ?C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_m$  — запрос
- ▶  $\mathcal{R} = A \leftarrow B_1, \dots, B_k$ ; — правило
- ▶  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}\eta$  — вариант правила  $\mathcal{R}$  для переименования  $\eta$ , не содержащий ни одной переменной из  $Q$
- ▶  $\theta \in \text{НОУ}(C_i, A\eta)$

Тогда запрос

$$Q' = (?C_1, \dots, C_{i-1}, B_1\eta, \dots, B_k\eta, C_{i+1}, \dots, C_m)\theta$$

называется **SLD-резольвентой** запроса  $Q$  и правила  $\mathcal{R}$  для подцели  $C_i$  и унификатора  $\theta$

То, что  $Q'$  — SLD-резольвента  $Q$  и  $\mathcal{R}$  как написано выше, будем обозначать записями

$$Q \xrightarrow{\mathcal{R}\eta, i, \theta} Q' \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} Q \xrightarrow{i, \theta} Q' \\ \mathcal{R}\eta \xrightarrow{\quad} Q' \end{array}$$

# Правило SLD-резолюции

## Примеры

$$?p(X), r(X, f(Y)), r(Y, c)$$

$$2 \left| \begin{array}{l} r(d, X') \leftarrow p(X'), r(c, Y'); \\ \{X/d, X'/f(Y)\} \end{array} \right.$$

$$?p(d), p(f(Y)), r(c, Y'), r(Y, c)$$
$$?p(X), r(X, f(Y)), r(Y, c)$$

$$3 \left| \begin{array}{l} r(d, X') \leftarrow p(X'), r(c, Y'); \\ \{Y/d, X'/c\} \end{array} \right.$$

$$?p(X), r(X, f(d)), p(c), r(c, Y')$$
$$?r(X, X.nil)$$

$$1 \left| \begin{array}{l} r(X'.nil, Y') \leftarrow; \\ \{X/X'.nil, Y'/(X'.nil).nil\} \end{array} \right.$$

$$\square$$

А у запроса  $?r(X, X.nil)$  и правила  $r(X.nil, X) \leftarrow;$  нет SLD-резольвент

**Утверждение.** Для любых запросов  $Q$  и  $Q'$  и правила  $R$  верно:  
 $Q'$  — SLD-резольвента  $Q$  и  $R \Leftrightarrow \neg\Phi_{Q'}$  — резольвента  $\neg\Phi_Q$  и  
некоторого варианта дизъюнкта  $\Phi_R$  для того же выбора атомов и  
того же унификатора

# Правило SLD-резолюции

**Немного о названии** «SLD-резолюция»:

S = Selective

L = Linear

D = Definite

Но если Вы сейчас попытались представить, что может означать каждое из этих слов, и думаете, что преуспели, то скорее всего это верно лишь отчасти

SLD-резолюция была придумана шотландским математиком Робертом Ковальски в начале далёких 1970-х годов в качестве одной из первых попыток осмыслить логику предикатов как язык программирования

Буквы S, L и D — это ограничения на построение резолютивного вывода в терминах, использовавшихся в те далёкие годы

А сейчас достаточно просто запомнить эти три буквы, воспринимая их как историческое наследие

# SLD-резольтивные вычисления

(Частичным) SLD-резольтивным вычислением программы  $\mathcal{P}$ , порождённым запросом  $Q$ , называется последовательность запросов (конечная или бесконечная) вида

$$Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} Q_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \theta_2} \dots ,$$

где:

- ▶  $Q_1 = Q$
- ▶  $\mathcal{R}_i, k_i$  и  $\theta_i, i \in \{1, 2, \dots\}$  — соответственно вариант какого-либо правила из  $\mathcal{P}$ , номер подцели и унификатор для резольвенты  $Q_{i+1}$

По умолчанию в примерах будем использовать вариант  $\mathcal{R}'$  правила  $\mathcal{R}$ , в котором ко всем переменным правила добавлены штрихи

Вычисление будем называть

- ▶ **успешным**, если оно конечно и оканчивается запросом  $\square$
- ▶ **тупиковым**, если оно конечно, неуспешно и не может быть продолжено до более длинного вычисления

# SLD-резольтивные вычисления

Для подстановки  $\theta$  и множества переменных  $V$  записью  $\theta|_V$  обозначим **проекцию подстановки**  $\theta$  на множество  $V$ , то есть подстановку, устроенную так:

- ▶ Если  $y \in V$ , то  $\theta|_V(y) = \theta(y)$
- ▶ Иначе  $\theta|_V(y) = y$

**Результатом конечного вычисления**

$$Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_{n-1}, k_{n-1}, \theta_{n-1}} Q_n$$

, а также ответом, **SLD-вычисленным** этим вычислением, будем называть подстановку  $\theta_1 \dots \theta_{n-1}|_{\text{Var}_{Q_1}}$

Ответ на запрос  $Q$  к программе  $\mathcal{P}$  будем называть **SLD-резольтивно вычислимым** (или просто **SLD-вычислимым**), если существует успешное SLD-резольтивное вычисление, результатом которого является этот ответ

# SLD-резольютивные вычисления

**Примеры** SLD-резольютивных вычислений программы  $\mathcal{P}$

$\mathcal{R}_1 : \text{elem}(X, X.L);$

$\mathcal{R}_2 : \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$

$\mathcal{R}_3 : \text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$

?elem( $X, \mathbf{k.l.o.p.nil}$ )

$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/\mathbf{k}, L'/\mathbf{l.o.p.nil}, X/\mathbf{k}\}$

□

Значит, подстановка  $\theta_1|_{\{X\}} = \{X/\mathbf{k}\}$  — SLD-вычислимый ответ на запрос ?elem( $X, \mathbf{k.l.o.p.nil}$ ) к  $\mathcal{P}$

# SLD-резольютивные вычисления

**Примеры** SLD-резольютивных вычислений программы  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{R}_1 : \text{elem}(X, X.L);$$

$$\mathcal{R}_2 : \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$$

$$\mathcal{R}_3 : \text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$$

?elem(X, **к.л.о.п.nil**)

$$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/X, Y'/\mathbf{k}, L'/\mathbf{л.о.п.nil}\}$$

?elem(X, **л.о.п.nil**)

$$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_2 = \{X'/X, Y'/\mathbf{л}, L'/\mathbf{о.п.nil}\}$$

?elem(X, **о.п.nil**)

$$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_3 = \{X'/\mathbf{о}, L'/\mathbf{п.nil}, X/\mathbf{о}\}$$

□

Значит, подстановка  $\theta_1\theta_2\theta_3|_{\{X\}} = \{X/\mathbf{о}\}$  — SLD-вычисляемый ответ на запрос ?elem(X, **к.л.о.п.nil**) к  $\mathcal{P}$

# SLD-резольютивные вычисления

**Примеры** SLD-резольютивных вычислений программы  $\mathcal{P}$

$\mathcal{R}_1 : \text{elem}(X, X.L);$

$\mathcal{R}_2 : \text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L);$

$\mathcal{R}_3 : \text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2);$

?common(X, **п.о.п.nil**, **к.л.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_3, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/X, L'_1/\text{п.о.п.nil}, L'_2/\text{к.л.о.п.nil}\}$

?elem(X, **п.о.п.nil**), elem(X, **к.л.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_2, 2 \downarrow \theta_2 = \{X'/X, Y'/\text{к}, L'/\text{л.о.п.nil}\}$

?elem(X, **п.о.п.nil**), elem(X, **л.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_3 = \{X'/X, Y'/\text{п}, L'/\text{о.п.nil}\}$

?elem(X, **о.п.nil**), elem(X, **л.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_4 = \{X'/\text{о}, L'/\text{п.nil}, X/\text{о}\}$

?elem(**о**, **л.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_5 = \{X'/\text{о}, Y'/\text{л}, L'/\text{о.п.nil}\}$

?elem(**о**, **о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_1, 1 \downarrow \theta_6 = \{X'/\text{о}, L'/\text{п.nil}\}$

□

Значит, подстановка  $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6|_{\{X\}} = \{X/\text{о}\}$  — SLD-вычислимый ответ на запрос ?common(X, **п.о.п.nil**, **к.л.о.п.nil**) к  $\mathcal{P}$

# SLD-резольютивные вычисления

**Примеры** SLD-резольютивных вычислений программы  $\mathcal{P}$

$\mathcal{R}_1$  :  $\text{elem}(X, X.L)$ ;

$\mathcal{R}_2$  :  $\text{elem}(X, Y.L) \leftarrow \text{elem}(X, L)$ ;

$\mathcal{R}_3$  :  $\text{common}(X, L_1, L_2) \leftarrow \text{elem}(X, L_1), \text{elem}(X, L_2)$ ;

?common( $X$ , **п.о.п.nil**, **к.л.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_3, 1 \downarrow \theta_1 = \{X'/X, L'_1/\text{п.о.п.nil}, L'_2/\text{к.л.о.п.nil}\}$

?elem( $X$ , **п.о.п.nil**), elem( $X$ , **к.л.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_1, 2 \downarrow \theta_2 = \{X'/\mathbf{k}, L'/\text{л.о.п.nil}, X/\mathbf{k}\}$

?elem(**к**, **п.о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_3 = \{X'/\mathbf{k}, Y'/\text{п}, L'/\text{о.п.nil}\}$

?elem(**к**, **о.п.nil**)

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_4 = \{X'/\mathbf{k}, Y'/\text{о}, L'/\text{п.nil}\}$

?elem(**к**, **п.nil**)

$\mathcal{R}'_2, 1 \downarrow \theta_5 = \{X'/\mathbf{k}, Y'/\text{п}, L'/\text{nil}\}$

?elem(**к**, **nil**)

Это тупиковое вычисление, им не задаётся SLD-вычислимый ответ