Математическая логика и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2015, весенний семестр

Лекция 1

Что изучает логика?

Логика в информатике

Структура курса

Исторические сведения

Логические парадоксы

Что изучает логика?

Логика[1] — это нормативная наука о формах и приёмах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка

Логика[2] — это наука, которая изучает, каким образом мы выражаем мысли, делаем умозаключения, и как всё это можно представить формально

Логика[3] — это наука о правильных способах рассуждения, то есть таких, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты

---

[1] Бочаров, Маркин. Основы логики.

[2] Метакидес, Нероуд. Принципы логики и логического программирования

[3] Успенский, Верещагин, Плиско. Вводный курс математической логики

Что изучает логика?

Логика — это междисциплинарная отрасль наук, изучающая

- законы причинно-следственной связи в окружающем мире
- проявление законов причинно-следственной связи в рациональном мышлении человека
- отражение законов причинно-следственной связи в языках (естественных и искусственных)

Что изучает логика?

Формальная логика

изучает **формы**, в которых проявляются законы причинно-следственных связей, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым относятся эти законы

Что изучает логика?

Например:

Посылки:

1: **Все люди смертны**

2: **Сократ — человек**

Следствие:

Сократ смертен

известный силлогизм

Что изучает логика?

Например:

Посылки:

1: **Каждый металл — проводник**

2: **Ртуть — металл**

Следствие:

Ртуть — проводник

физическое суждение

Что изучает логика?

Например:

Посылки:

1: **Инертные газы химически неактивны**

2: **Гелий — инертный газ**

Следствие:

Гелий химически неактивен

химическое суждение

Что изучает логика?

Например:

Посылки:

1: **Во всех южных городах летом тепло**

2: **Ставрополь — южный город**

Следствие:

В Ставрополе летом тепло

географическое суждение

Что изучает логика?

Например:

Общая форма всех этих суждений

Посылки:

1: **Каждый предмет, обладающий свойством A, обладает и свойством B**

2: **Предмет c обладает свойством A**

Следствие:

Предмет c обладает свойством B

закон формальной логики

Что изучает логика?

Например:

Общая форма всех этих суждений

$$\frac{\begin{array}{l} 1:\ \forall x\,(A(x) \to B(x)) \\ 2:\ A(c) \end{array}}{B(c)}$$

закон формальной логики
(в символьном виде)

Логика в информатике

Есть **логический закон**:

$$\frac{\begin{array}{l} 1:\ \forall x\,(A(x) \to B(x)) \\ 2:\ A(c) \end{array}}{B(c)}$$

Есть его **интерпретация**:

$A(x)$: “x — инертный газ”

$B(x)$: “x химически неактивен”

c: “гелий”

Логика в информатике

Есть **логический закон**:

$$\frac{\begin{array}{l} 1:\ \forall x\,(A(x) \to B(x)) \\ 2:\ A(c) \end{array}}{B(c)}$$

Есть и другая **интерпретация**:

$A(x)$: “x — металл”

$B(x)$: “x — проводник”

c: “ртуть”

Логика в информатике

Это исходные знания (база знаний):

1: Каждый металл — проводник
2: Ртуть — металл

Это новые знания:

Ртуть — проводник

Как расценивать новые знания?
Откуда они взялись?
Узнали ли мы что-нибудь новое о мире?

Логика в информатике

Знание — это форма представления информации; формальное высказывание

Закон формальной логики — это принцип преобразования одних высказываний в другие

Формальная логика позволяет
преобразовывать форму представления информации,
но **не позволяет** получать новую информацию

Таким образом,

законы формальной логики — это инструмент преобразования информации

Логика в информатике

Основная задача формальной логики

Даны:

база знаний $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$

высказывание ψ

(неформально) Выяснить, является ли высказывание ψ следствием знаний Γ

(формально) Проверить, выводится ли ψ из Γ по законам формальной логики

Логика в информатике

Приложение 1

Экспертные системы

Γ — база знаний экспертной системы

ψ — запрос к базе знаний

Аппарат логического вывода — ядро экспертной системы

Приложение 2

Автоматизация научных исследований

Γ — система аксиом математической теории

ψ — математическое утверждение

Аппарат логического вывода — ядро системы доказательства теорем

Логика в информатике

Для этого нужно

- иметь формальный язык для представления знаний
- иметь подходящую систему законов формальной логики
- быть уверенным в корректности законов
- быть уверенным в полноте системы законов
- иметь алгоритм проверки выводимости высказываний

Это первый блок лекций

- иметь практически пригодный алгоритм проверки выводимости высказываний

Это второй блок лекций

Приложение 3

Программирование

Вычисление программы — последовательное преобразование состояний данных интерпретатором

Логический вывод — последовательное преобразование высказываний по законам формальной логики

Г — программа
ψ — исходные данные (вызов, запрос)
Аппарат логического вывода — интерпретатор

Логика в информатике

Однако есть проблема:

вычисление конструктивно,

а логический вывод (доказательство) может быть неконструктивным

Роль вычисления может играть только конструктивный вывод

Логика в информатике

Например:

Задача: существуют ли два иррациональных числа α, β, такие что α^β — рациональное число?
Решение: да, существуют:

- если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рациональное число, то $\alpha = \beta = \sqrt{2}$
- иначе $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $\beta = \sqrt{2}$

Такое доказательство **неконструктивно**: мы доказали существование чисел α, β, но не смогли их **вычислить**

Логика в информатике

Таким образом, чтобы использовать логику для программирования, нужно:

- иметь формальный язык представления программ в виде логических утверждений
- иметь аппарат конструктивного логического вывода
- быть уверенным в вычислительной корректности вывода
- быть уверенным в алгоритмической полноте аппарата вывода
- сделать такой способ программирования удобным для использования

Это третий блок лекций

Логика в информатике

Приложение 4

Программы могут быть правильными и неправильными

Правильная программа — это такая программа, поведение которой удовлетворяет заданной спецификации (требованиям корректности)

Методы логики могут быть использованы для доказательства правильности программ

Логика в информатике

Для этого нужно располагать:

- формальным языком описания требований правильности программ
- правилами логического доказательства правильности программ
- способом применения этих правил для доказательства правильности программ относительно заданных спецификаций

Это четвёртый блок лекций (?)

Кто это всё придумал?

Исторические сведения

Аристотель

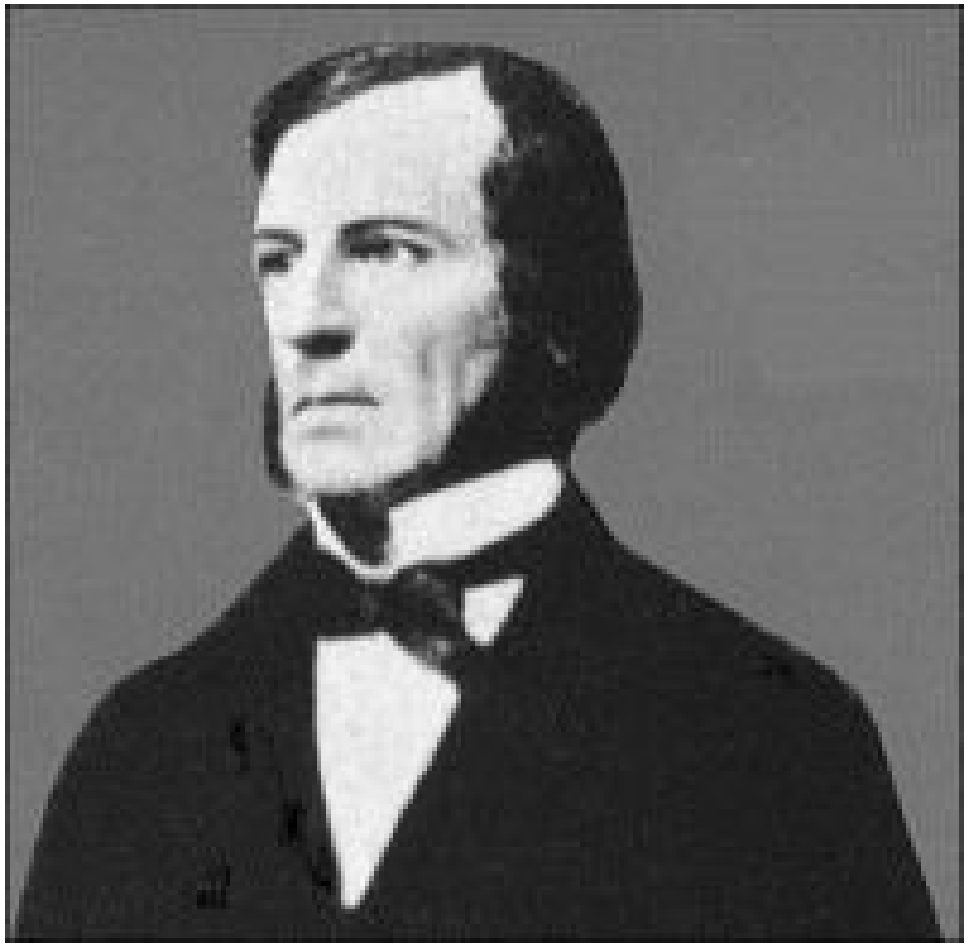
384 до н.э. – 322 до н.э.

Исторические сведения

Готфрид Лейбниц

1646–1716

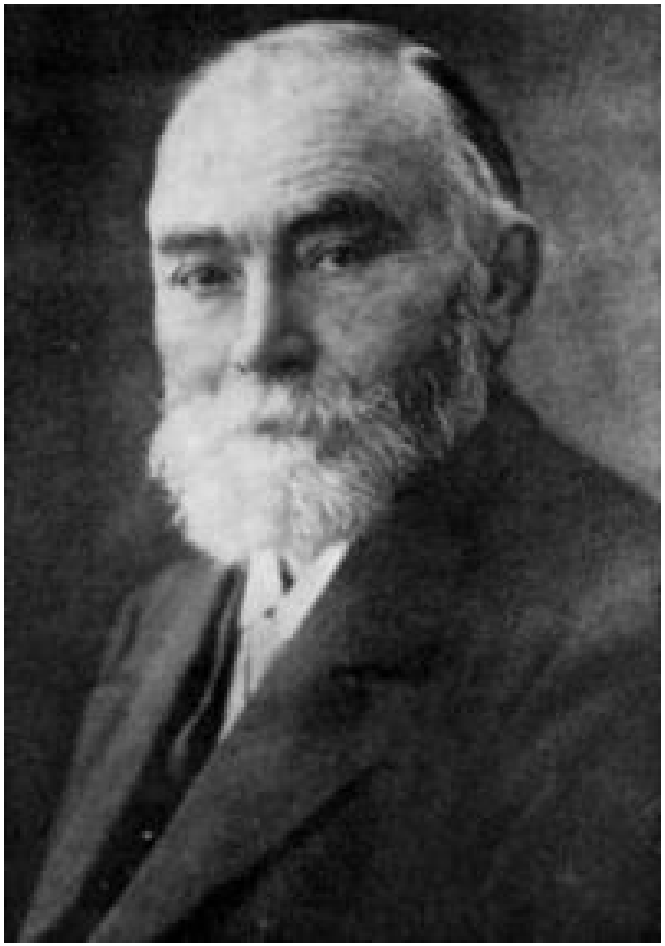
Исторические сведения



Джордж Буль

1815–1864

Исторические сведения



Готлоб Фреге

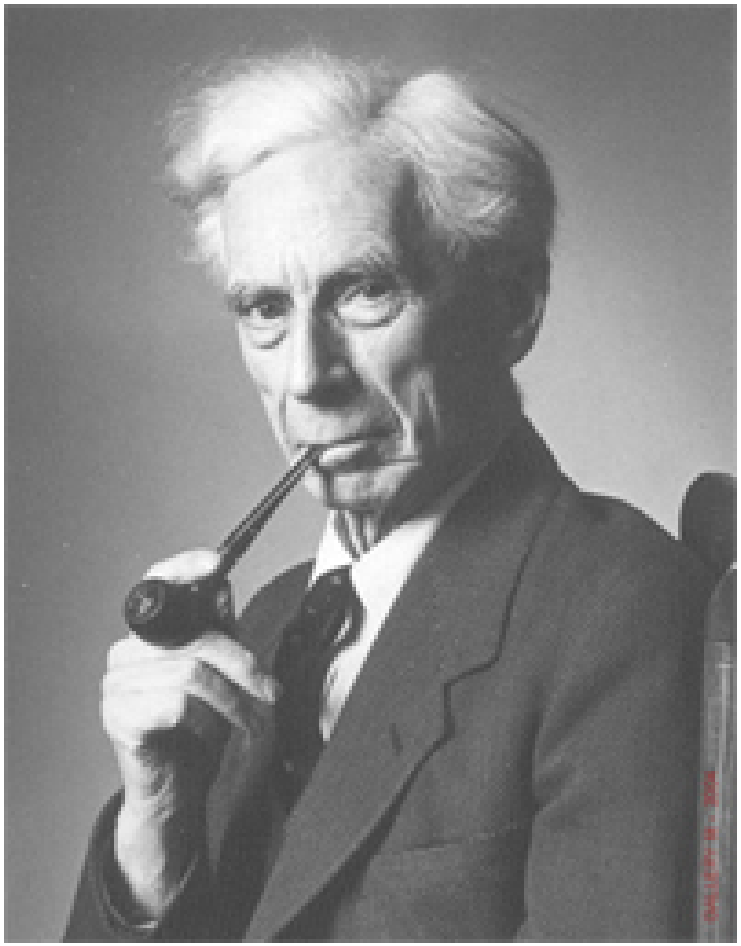
1848–1925

Исторические сведения

Давид Гильберт

1862–1943

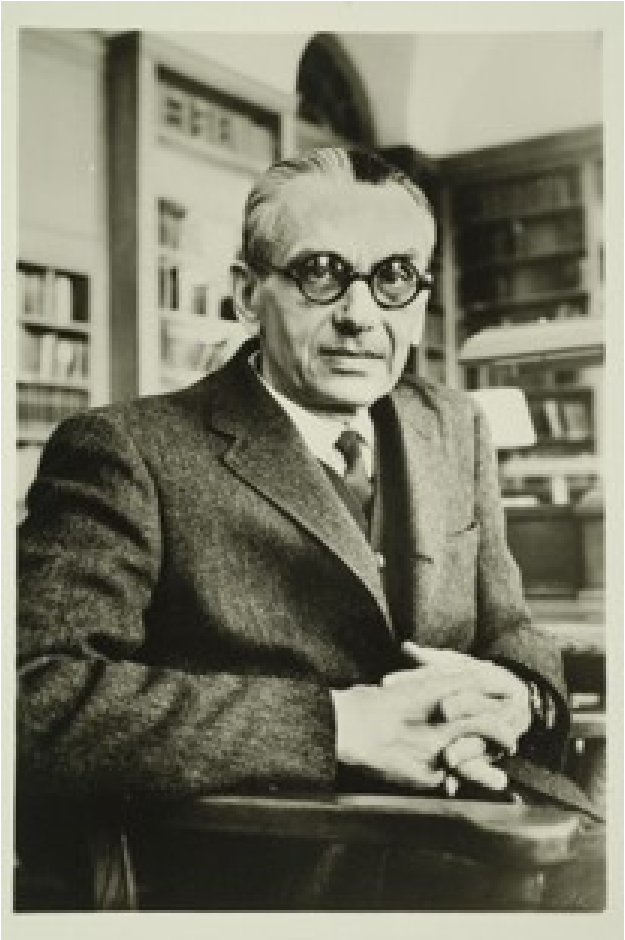
Исторические сведения



Бертран Рассел

1872–1970

Исторические сведения



Курт Гёдель

1906–1978

Исторические сведения

Альфред Тарский
1901–1983

Исторические сведения

Жак Эрбран

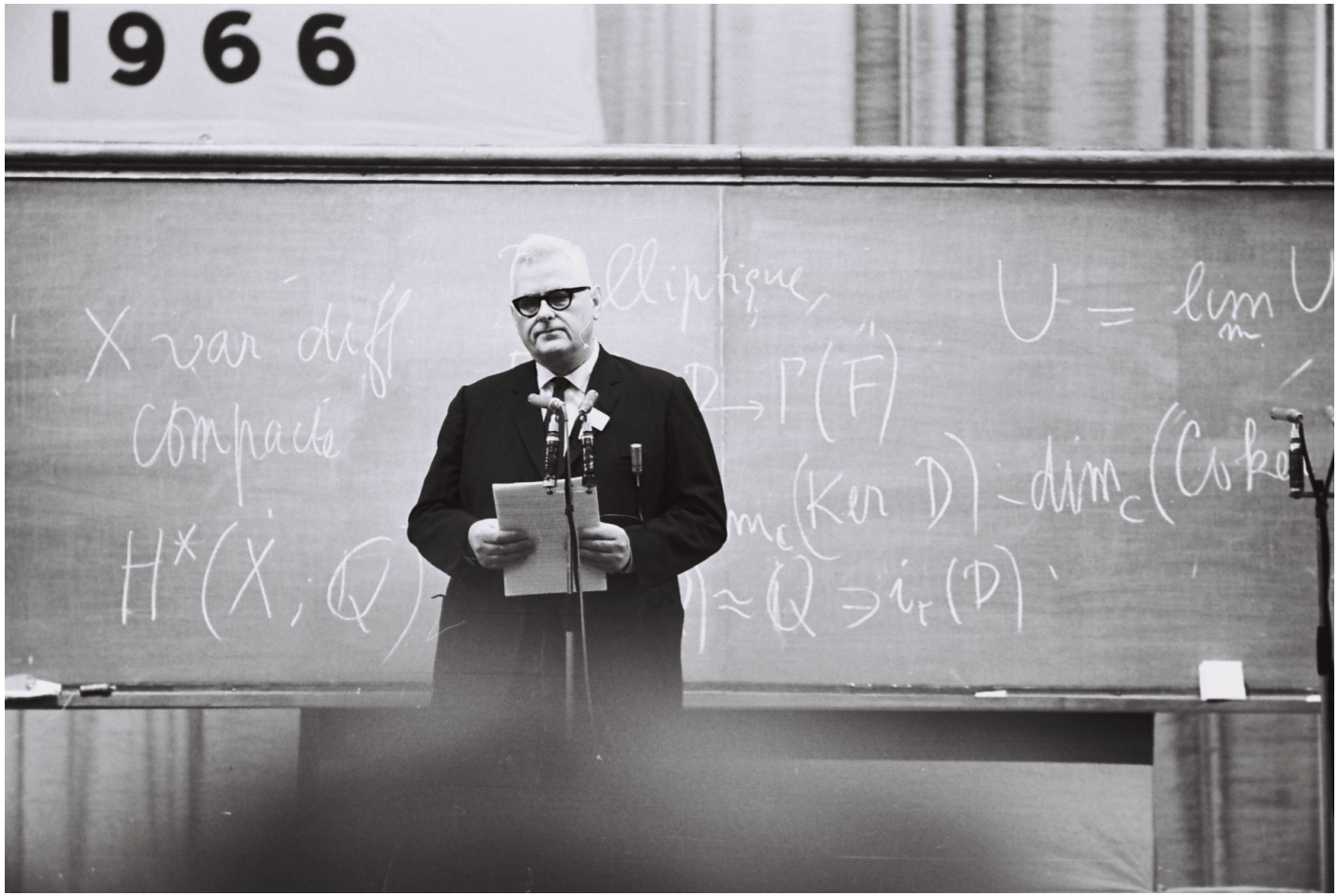
1908–1931

Исторические сведения

Герхард Генцен

1909–1945

Исторические сведения



Алонзо Чёрч

1903–1995

Исторические сведения

Анатолий Мальцев (слева)
1909–1967

Стивен Клини (справа)
1909–1994

Исторические сведения

Ален Колмероэ

1941–. . .

Исторические сведения

Михаил Захарьящев

1956–. . .

Что движет развитием логики?

Логические парадоксы

Парадоксы — движущая сила логики

Они заставляются задумываться над такими вопросами, как

- Что такое истинное утверждение?
- Что такое доказуемое утверждение?
- В какой мере можно “механизировать” рассудочное мышление?

Логические парадоксы

Дилемма крокодила

Крокодил схватил ребенка.

Мать ребенка просит крокодила:
“Верни мне ребенка!”

Крокодил отвечает:
“Я верну тебе ребенка, если ты угадаешь, исполню ли я твою просьбу”

Если мать ответит “вернёшь”, она получит ребёнка?

А если мать ответит “не вернёшь”?

Логические парадоксы

Парадокс лжеца

Это утверждение ложно

Ложно ли утверждение выше?

Логические парадоксы

Парадокс утренней звезды

Венера видна ранним утром, и поэтому её называют
“**утренней звездой**”

Венера видна поздним вечером, и поэтому её называют
“**вечерней звездой**”

Означает ли это, что **утренняя звезда**
видна **поздним вечером**?

Логические парадоксы

Парадокс лысого

Если у человека нет ни одного волоса, то он лыс

Если у лысого вырастет ещё один волосок, то он останется лысым

Значит, **все люди лысые**

Логические парадоксы

Парадокс морской битвы

Некий флотоводец обратился к прорицателю с вопросом, состоится ли завтра морская битва. Прорицатель ответил: “Битва завтра состоится”.
На следующий день случился шторм, и флот не смог выйти в море. Разгневанный флотоводец потребовал от прорицателя вернуть деньги, поскольку его прогноз оказался ложным. Прорицатель ответил: “Твои моряки вчера купили на рынке свежее молоко. Сегодня это молоко уже не свежее, но они не просят вернуть им деньги обратно. Мой прогноз тоже был верным вчера, и ты не вправе жаловаться на то, что он неверен сегодня”.

Прав ли прорицатель?

Парадоксы неизбежны

Но их влияние можно ограничить

Для этого нужны
математические модели логических законов

Так и появилась

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Конец лекции 1