

# Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математические методы верификации схем и программ

## Блок 16

Пересечение автоматов Бюхи

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Общая схема автоматного алгоритма model checking для LTL:

1. По модели Крипке  $M$  строится автомат  $A_M$ , распознающий  $\text{Tr}(M)$
2. По ltl-формуле  $\varphi$  строится автомат  $A_{\neg\varphi}$ , распознающий  $\text{Tr}(\neg\varphi)$
3. Строится пересечение  $A_{\cap}$  автоматов  $A_M$  и  $A_{\neg\varphi}$ :  
автомат, распознающий  $\text{Tr}(M) \cap \text{Tr}(\neg\varphi)$
4. Проверяется **пустота** автомата  $A_{\cap}$ :  $\text{Tr}(M) \cap \text{Tr}(\neg\varphi) \stackrel{?}{=} \emptyset$
5. Выдаётся ответ: «да»  $\Leftrightarrow$  автомат  $A_{\cap}$  пуст

Автомат Бюхи  $A$  будем называть

**пересечением автоматов Бюхи**  $A_1$  и  $A_2$ , если  $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

Записью  $A' \otimes A''$

для автоматов Бюхи  $A' = (S', S'_0, \rightarrow, F')$  и  $A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F'')$

обозначим **синхронную композицию** этих автоматов,

то есть **обобщённый** автомат Бюхи  $(S, S_0, \Rightarrow, \mathcal{F})$  следующего вида:

▶  $S = S' \times S''$

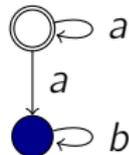
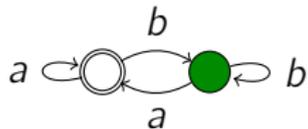
▶  $S_0 = S'_0 \times S''_0$

▶  $\mathcal{F} = \{F' \times S'', S' \times F''\}$

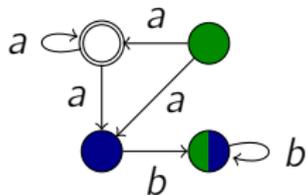
▶  $(s'_1, s''_1) \xRightarrow{x} (s'_2, s''_2) \Leftrightarrow s'_1 \xrightarrow{x} s'_2 \text{ и } s''_1 \mapsto^x s''_2$

## Пример

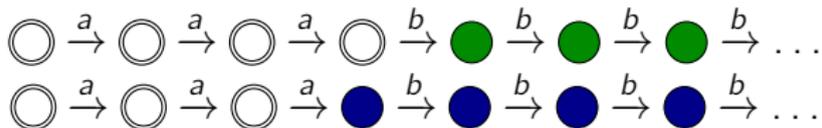
Синхронной композицией автоматов Бюхи



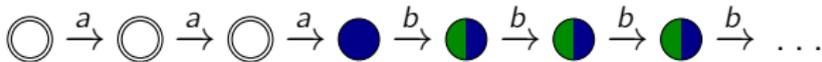
является обобщённый автомат Бюхи



Паре вычислений исходных автоматов



взаимно соответствует вычисление композиции



## Теорема о пересечении автоматов Бюхи

Для любой пары автоматов Бюхи  $A'$ ,  $A''$   
разобобщение автомата  $A' \otimes A''$  является их пересечением

Доказательство

По теореме о разобобщении автомата Бюхи,  
достаточно показать, что верно  $L(A' \otimes A'') = L(A') \cap L(A'')$

Пусть, для определённости,

- ▶  $A' = (S', S'_0, \rightarrow, F')$
- ▶  $A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F'')$
- ▶  $A' \otimes A'' = (S, S_0, \Rightarrow, \{F_1, F_2\})$

# Теорема о пересечении автоматов Бюхи

Для любой пары автоматов Бюхи  $A'$ ,  $A''$

разобобщение автомата  $A' \otimes A''$  является их пересечением

Доказательство ( $L(A' \otimes A'') \subseteq L(A') \cap L(A'')$ )

$(A' = (S', S'_0, \rightarrow, F'), A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F''), A' \otimes A'' = (S, S_0, \Rightarrow, \{F_1, F_2\}))$

Рассмотрим произвольное  $\omega$ -слово  $w \in L(A' \otimes A'')$

В  $A' \otimes A''$  существует успешное вычисление  $\rho$  вида

$$(s'_1, s''_1) \xrightarrow{w[1]} (s'_2, s''_2) \xrightarrow{w[2]} \dots$$

По заданию автомата  $A' \otimes A''$ , верно следующее:

- ▶  $\rho' = (s'_1 \xrightarrow{w[1]} s'_2 \xrightarrow{w[2]} \dots)$  — вычисление автомата  $A'$ 
  - ▶ Так как  $\text{inf}(\rho) \cap (F' \times S'') \neq \emptyset$ , то и  $\text{inf}(\rho') \cap F' \neq \emptyset$
  - ▶ Значит, вычисление  $\rho'$  успешно
- ▶  $\rho'' = (s''_1 \xrightarrow{w[1]} s''_2 \xrightarrow{w[2]} \dots)$  — вычисление автомата  $A''$ 
  - ▶ Аналогично, вычисление  $\rho''$  успешно

Значит,  $w \in L(A')$  и  $w \in L(A'')$ , то есть  $w \in L(A') \cap L(A'')$

# Теорема о пересечении автоматов Бюхи

Для любой пары автоматов Бюхи  $A'$ ,  $A''$

разобобщение автомата  $A' \otimes A''$  является их пересечением

Доказательство ( $L(A' \otimes A'') \supseteq L(A') \cap L(A'')$ )

$(A' = (S', S'_0, \rightarrow, F'), A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F''), A' \otimes A'' = (S, S_0, \Rightarrow, \{F_1, F_2\}))$

Рассмотрим  $\omega$ -слово  $w \in L(A') \cap L(A'')$

Тогда существуют успешные вычисления  $\rho'$ ,  $\rho''$  соответственно вида

$$(s'_1 \xrightarrow{w[1]} s'_2 \xrightarrow{w[2]} \dots) \quad \text{и} \quad (s''_1 \xrightarrow{w[1]} s''_2 \xrightarrow{w[2]} \dots)$$

По заданию автомата  $A' \otimes A''$ , верно следующее:

- ▶  $\rho = ((s'_1, s''_1) \xrightarrow{w[1]} (s'_2, s''_2) \xrightarrow{w[2]} \dots)$  — вычисление  $A' \otimes A''$
- ▶ Так как  $\text{inf}(\rho') \cap F' \neq \emptyset$ , то и  $\text{inf}(\rho) \cap (F' \times S'') \neq \emptyset$
- ▶ Аналогично,  $\text{inf}(\rho) \cap (S' \times F'') \neq \emptyset$

Значит, вычисление  $\rho$  успешно, и  $w \in L(A' \otimes A'')$  ▼