

Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 16

Пересечение автоматов Бюхи

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Общая схема автоматного алгоритма model checking для LTL:

1. По модели Крипке M строится автомат A_M , распознающий $\text{Tr}(M)$
2. По ltl-формуле φ строится автомат $A_{\neg\varphi}$, распознающий $\text{Tr}(\neg\varphi)$
3. Строится пересечение A_{\cap} автоматов A_M и $A_{\neg\varphi}$:
автомат, распознающий $\text{Tr}(M) \cap \text{Tr}(\neg\varphi)$
4. Проверяется **пустота** автомата A_{\cap} : $\text{Tr}(M) \cap \text{Tr}(\neg\varphi) \stackrel{?}{=} \emptyset$
5. Выдаётся ответ: «да» \Leftrightarrow автомат A_{\cap} пуст

Автомат Бюхи A будем называть **пересечением автоматов Бюхи** A_1 и A_2 , если $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

Записью $A' \otimes A''$

для автоматов Бюхи $A' = (S', S'_0, \rightarrow, F')$ и $A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F'')$

обозначим **синхронную композицию** этих автоматов,

то есть **обобщённый** автомат Бюхи $(S, S_0, \Rightarrow, \mathcal{F})$ следующего вида:

▶ $S = S' \times S''$

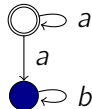
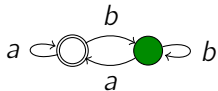
▶ $S_0 = S'_0 \times S''_0$

▶ $\mathcal{F} = \{F' \times S'', S' \times F''\}$

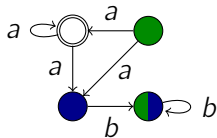
▶ $(s'_1, s''_1) \xRightarrow{x} (s'_2, s''_2) \Leftrightarrow s'_1 \xrightarrow{x} s'_2 \text{ и } s''_1 \mapsto^x s''_2$

Пример

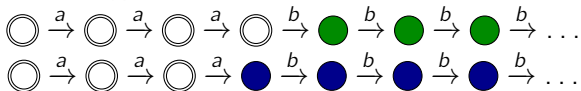
Синхронной композицией автоматов Бюхи



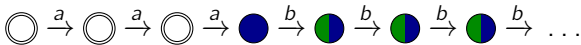
является обобщённый автомат Бюхи



Паре вычислений исходных автоматов



взаимно соответствует вычисление композиции



Теорема о пересечении автоматов Бюхи

Для любой пары автоматов Бюхи A' , A''
разобобщение автомата $A' \otimes A''$ является их пересечением

Доказательство

По теореме о разобобщении автомата Бюхи,
достаточно показать, что верно $L(A' \otimes A'') = L(A') \cap L(A'')$

Пусть, для определённости,

- ▶ $A' = (S', S'_0, \rightarrow, F')$
- ▶ $A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F'')$
- ▶ $A' \otimes A'' = (S, S_0, \Rightarrow, \{F_1, F_2\})$

Теорема о пересечении автоматов Бюхи

Для любой пары автоматов Бюхи A' , A''

разобобщение автомата $A' \otimes A''$ является их пересечением

Доказательство ($L(A' \otimes A'') \subseteq L(A') \cap L(A'')$)

($A' = (S', S'_0, \rightarrow, F')$, $A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F'')$, $A' \otimes A'' = (S, S_0, \Rightarrow, \{F_1, F_2\})$)

Рассмотрим произвольное ω -слово $w \in L(A' \otimes A'')$

В $A' \otimes A''$ существует успешное вычисление ρ вида

$$(s'_1, s''_1) \xrightarrow{w[1]} (s'_2, s''_2) \xrightarrow{w[2]} \dots$$

По заданию автомата $A' \otimes A''$, верно следующее:

- ▶ $\rho' = (s'_1 \xrightarrow{w[1]} s'_2 \xrightarrow{w[2]} \dots)$ — вычисление автомата A'
 - ▶ Так как $\text{inf}(\rho) \cap (F' \times S'') \neq \emptyset$, то и $\text{inf}(\rho') \cap F' \neq \emptyset$
 - ▶ Значит, вычисление ρ' успешно
- ▶ $\rho'' = (s''_1 \xrightarrow{w[1]} s''_2 \xrightarrow{w[2]} \dots)$ — вычисление автомата A''
 - ▶ Аналогично, вычисление ρ'' успешно

Значит, $w \in L(A')$ и $w \in L(A'')$, то есть $w \in L(A') \cap L(A'')$

Теорема о пересечении автоматов Бюхи

Для любой пары автоматов Бюхи A' , A''

разобобщение автомата $A' \otimes A''$ является их пересечением

Доказательство ($L(A' \otimes A'') \supseteq L(A') \cap L(A'')$)

$(A' = (S', S'_0, \rightarrow, F'), A'' = (S'', S''_0, \mapsto, F''), A' \otimes A'' = (S, S_0, \Rightarrow, \{F_1, F_2\}))$

Рассмотрим ω -слово $w \in L(A') \cap L(A'')$

Тогда существуют успешные вычисления ρ' , ρ'' соответственно вида

$$(s'_1 \xrightarrow{w[1]} s'_2 \xrightarrow{w[2]} \dots) \quad \text{и} \quad (s''_1 \xrightarrow{w[1]} s''_2 \xrightarrow{w[2]} \dots)$$

По заданию автомата $A' \otimes A''$, верно следующее:

- ▶ $\rho = ((s'_1, s''_1) \xrightarrow{w[1]} (s'_2, s''_2) \xrightarrow{w[2]} \dots)$ — вычисление $A' \otimes A''$
- ▶ Так как $\text{inf}(\rho') \cap F' \neq \emptyset$, то и $\text{inf}(\rho) \cap (F' \times S'') \neq \emptyset$
- ▶ Аналогично, $\text{inf}(\rho) \cap (S' \times F'') \neq \emptyset$

Значит, вычисление ρ успешно, и $w \in L(A' \otimes A'')$ ▼