Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 4

Как формализовать предложение
на языке логики предикатов
(пример)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Это определение формулируется для двух предметов:

1. Последовательность действительных чисел ($\mathtt{s}$)
2. Действительное число ($\mathtt{x}$),
   про которое говорится, что оно является пределом $\mathtt{s}$

Вспомним, как определение записывается на естественном языке:

$\mathtt{s}$ **— последовательность действительных чисел,**
$\mathtt{x}$ **— действительное число, и**
для любого положительного действительного числа ε
существует натуральное число n**, такое что**
все элементы последовательности $\mathtt{s}$**, начиная с** $\mathtt{n}$**-го,**
отстоят от $\mathtt{x}$ **не более чем на** ε

Попробуем записать на языке логики предикатов **определение предела последовательности действительных чисел**

Прежде чем начать записывать формулу, определимся с сигнатурой

Для примера выберем такую:

- $\mathbf{0} \in \mathrm{Const}$
- $\mathbf{ad}^{(2)} \in \mathrm{Func}$: $\quad \mathbf{ad}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$ «$|x - y|$»
- $\mathrm{R}^{(1)}, \mathrm{N}^{(1)}, \mathrm{S}^{(1)}, \mathrm{E}^{(3)}, <^{(2)}, \leq^{(2)} \in \mathrm{Pred}$:
    - $\mathrm{R}(\mathrm{x}) =$ «x — действительное число»
    - $\mathrm{N}(\mathrm{x}) =$ «x — натуральное число»
    - $\mathrm{S}(\mathrm{x}) =$ «x — последовательность действительных чисел»
    - $\mathrm{E}(\mathrm{x}, \mathrm{n}, \mathrm{s}) =$ «x — n-й член последоватлеьности s»
    - $\mathrm{x} < \mathrm{y}$, $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$ — отношения неравенства чисел x и y

Попробуем записать на языке логики предикатов

определение предела последовательности действительных чисел

$\mathtt{s}$ **— последовательность действительных чисел,**
$\mathtt{x}$ **— действительное число, и**
для любого положительного действительного числа ε
существует натуральное число n**, такое что**
все элементы последовательности $\mathtt{s}$**, начиная с** $\mathtt{n}$**-го,**
отстоят от $\mathtt{x}$ **не более чем на** ε

Здесь записаны три утверждения,
связанные (один раз явно, один раз неявно) союзом «и»

На языке логики предикатов это переписывается так («и» = «&»):

$$\mathrm{S}(\mathtt{s}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathtt{x}) \,\&\, \varphi_1$$

С формулой φ_1 разберёмся отдельно

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Для любого положительного действительного числа ε
существует натуральное число $\mathtt{n}$**, такое что**
все элементы последовательности $\mathtt{s}$**, начиная с** $\mathtt{n}$**-го,**
отстоят от $\mathtt{x}$ **не более чем на** ε

«Для любого» = «$\forall$», и справа от $\forall$ обязательно стоит переменная, обозначающая **произвольный предмет**

Переформулируем предложение соответствующим образом:

Для любого **предмета** ε верно следующее:
если ε — положительное действительное число, то существует …

$$\forall\varepsilon\ (\mathrm{R}(\varepsilon)\,\&(\mathbf{0}<\varepsilon)\to\varphi_2)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой φ_2

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Существует натуральное число $\mathtt{n}$**, такое что**
все элементы последовательности $\mathtt{s}$**, начиная с** $\mathtt{n}$**-го,**
отстоят от $\mathtt{x}$ **не более чем на** ε

«Существует» = «хотя бы один» = «$\exists$», и справа от $\exists$ обязательно стоит переменная, обозначающая **произвольный предмет**

Переформулируем предложение соответствующим образом:

Существует **предмет** $\mathtt{n}$, для которого верно следующее:
$\mathtt{n}$ — натуральное число, и кроме того, все элементы ...

$$\exists \mathtt{n}\ (\mathrm{N}(\mathtt{n}) \& \varphi_3)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой φ_3

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Все элементы последовательности $\mathtt{s}$**, начиная с** $\mathtt{n}$**-го, отстоят от** $\mathtt{x}$ **не более чем на** ε

«Все» = «для любого» = «$\forall$»

Присвоим произвольному элементу, о котором говорится в предложении, имя ($\mathtt{y}$), и переформулируем предложение:

Для любого предмета $\mathtt{y}$ верно следующее:
если $\mathtt{y}$ совпадает с каким-либо элементом последовательности $\mathtt{s}$ с номером, не меньшим $\mathtt{n}$, то $\mathtt{y}$ отстоит от $\mathtt{x}$ не более чем на ε

$$\forall \mathtt{y}\ (\varphi_4 \to \mathbf{ad}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \le \varepsilon)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой φ_4

Попробуем записать на языке логики предикатов

определение предела последовательности действительных чисел

$\mathtt{y}$ **совпадает с каким-либо элементом последовательности** $\mathtt{s}$ **с номером, не меньшим** $\mathtt{n}$

В формуле φ_4 «снаружи» располагается одна из операций

$$\&,\ \vee,\ \rightarrow,\ \neg,\ \forall,\ \exists$$

Чтобы понять, какая именно, переформулируем предложение так, чтобы «снаружи» располагалось одно из словосочетаний

«и», «или», «если-то», «не», «для любого», «существует»:

Существует предмет m, такой что m — натуральное число, и m не меньше n, и y — m-й элемент последовательности s

$$\exists \mathtt{m}\ (\mathrm{N}(\mathtt{m}) \& (\mathtt{n} \le \mathtt{m}) \& \mathrm{E}(\mathtt{y}, \mathtt{m}, \mathtt{s}))$$

Попробуем записать на языке логики предикатов
определение предела последовательности действительных чисел

Ответ:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{S}(\mathtt{s})\,\&\,\mathrm{R}(\mathtt{x})\,\& \\
\forall\varepsilon\ (\\
\quad \mathrm{R}(\varepsilon)\,\&(\mathbf{0}<\varepsilon)\rightarrow \\
\quad \exists\mathtt{n}\ (\\
\qquad \mathrm{N}(\mathtt{n})\,\& \\
\qquad \forall\mathtt{y}\ (\\
\qquad\quad \exists\mathtt{m}\ (\\
\qquad\qquad \mathrm{N}(\mathtt{m})\,\&(\mathtt{n}\le\mathtt{m})\,\&\,\mathrm{E}(\mathtt{y},\mathtt{m},\mathtt{s}) \\
\qquad\quad)\rightarrow \\
\qquad\quad \mathbf{ad}(\mathtt{x},\mathtt{y})\le\varepsilon \\
\qquad) \\
\quad) \\
)
\end{array}
$$