Лекция 1. Графы. Основные определения. Простейшие свойства графов. Пути и цепи в графах. Связность, k-связность. Деревья, корневые деревья. Остовные деревья.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Определение графа

(**Неориентированным**) **графом** G называется пара (V, E), где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество ребер, причем каждому ребру $e \in E$ сопоставлена **неупорядоченная** пара вершин, т. е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Обозначения:
$V(G)$ — множество вершин графа G,
$E(G)$ — множество ребер графа G.

Пример: сеть

Сеть — p узлов с соединениями между некоторыми из них.

Петли и кратные ребра

Ребро $e = (v, v)$, где $v \in V$, называется **петлей**.

Ребра $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, называются **кратными** ребрами.

Граф, в котором допускаются и петли, и кратные ребра иногда называется **псевдографом**.
Граф без петель, но, возможно, с кратными ребрами называется **мультиграфом**.
Граф без петель и кратных ребер называется **простым**, или **обыкновенным** графом.

Мы будем, как правило, рассматривать простые графы, т. е. графы без петель и кратных ребер. Дальнейшие определения будут вводится, в основном, только для таких графов.

Изоморфизм графов

Два графа (без петель и кратных ребер)

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ и } G_2 = (V_2, E_2)$$

называются **изоморфными**, если найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее ребра, т. е. для любых вершин $v, w \in V_1$ выполняется

$$(v, w) \in E_1 \;\Leftrightarrow\; (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Смежность

Говорят, что ребро $e = (v, w)$ **соединяет** вершины v и w, или **исходит** из вершины v (и из вершины w), или вершины v и w **инцидентны** ребру e.

При этом вершины v и w называются **концами** ребра e, или **смежными** (**соседними**) по ребру e.

Полные графы

Полным графом называется граф, в котором любые две различные вершины смежны;

K_n — полный граф с n вершинами, K_3 — **треугольник**.

Двудольные графы

Двудольным графом называется граф, в котором вершины можно разбить на две части (доли) так, что смежны только вершины из разных долей.

Полный двудольный граф — двудольный граф, в котором смежны любые две вершины из разных долей;

$K_{m,n}$ — полный двудольный граф с долями из m и n вершин.

Степень вершины

Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе (без петель и кратных ребер) $G = (V, E)$ называется число смежных с ней вершин.

Если $d_G(v) = 0$, то вершина v называется **изолированной** в графе G; если $d_G(v) = 1$, то вершина v называется **висячей**, или **концевой** в графе G.

Обозначения: $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ и $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ — соответственно, наименьшая и наибольшая степени вершин в графе G.

Формула Эйлера для степеней вершин

Предложение 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда*
1) $\sum\limits_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$;
2) *в графе G число вершин, имеющих нечетную степень, четно.*

Доказательство.
1. Рассмотрим сумму в левой части равенства. Т. к. любое ребро графа имеет ровно два конца, каждое ребро в этой сумме будет подсчитано ровно два раза. Получаем выражение в правой части равенства.
2. Свойство непосредственно следует из равенства п. 1.

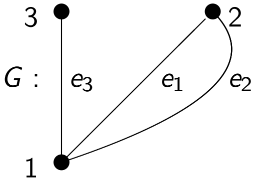
$\square$

Отметим, что формула Эйлера для степеней вершин верна и для псевдографов.

Изображения графов

Для наглядности графы можно изображать: вершинам ставятся в соответствие **точки** (разным вершинам — различные точки); ребрам сопоставляются непрерывные **линии**, соединяющие соответствующие вершины (точки) (разным ребрам — различные линии).

Пусть $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (1, 2)$ и $e_3 = (1, 3)$.



Пути в графах

Путем в графе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m)**-путем**) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{m-1} e_m v_m,$$

в которой $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$ для каждого $j = 1, \dots, m$.

При этом вершина v_0 называется **началом** пути, вершина v_m называется **концом** пути. Число m ребер пути называется его **длиной**.

Для графов без петель и кратных ребер **путь** однозначно определяется последовательностью вершин $v_0 v_1 v_2 \dots v_{m-1} v_m$.

Цепь — путь без повторений ребер.

Простая цепь — цепь без повторений вершин.

Циклы в графах

Замкнутый путь — путь, в котором первая и последняя вершины совпадают.

Цикл — замкнутый путь без повторений ребер.

Простой цикл — цикл, в котором все вершины, кроме последней, различны.

Свойства путей и цепей

Предложение 2.
Пусть $G = (V, E)$ *— граф без петель и кратных ребер. Тогда*

1) *в графе* G *из любого замкнутого пути нечетной длины* m, $m \geqslant 3$, *можно выделить простой цикл нечетной длины;*

2) *в графе* G *найдутся*
а) *простая цепь с длиной, не меньшей* $\delta(G)$,
б) *простой цикл с длиной, не меньшей* $\delta(G) + 1$ *при* $\delta(G) \geqslant 2$.

Свойства путей и цепей

Доказательство.
1. Рассмотрим замкнутый путь P нечетной длины m, $m \geqslant 3$. Если в нем никакая вершина, кроме последной, не повторяется, то он — искомый простой цикл нечетной длины. Пусть некоторая вершина $v \in V$ в нем повторяется, т. е.

$$P = vP_1vP_2v,$$

где P_1, P_2 — непересекающиеся непустые части пути P, на которые его разбивает вершина v. Пусть m_1, m_2 — длины замкнутых путей P_1, P_2, причем, $m_1 < m$ и $m_2 < m$. Из того, что $m = m_1 + m_2$ и m — нечетное число, заключаем, что либо m_1 — нечетное число, либо m_2 — нечетное число. Повторим рассуждения для нового замкнутого пути P_i с меньшей нечетной длиной m_i. Через конечное число шагов получим искомый простой цикл нечетной длины.

Свойства путей и цепей

Доказательство.
2. a) Рассмотрим произвольную вершину $v_0 \in V$. Положим $P_0 = v_0$ — простая цепь длины 0. Пусть мы уже построили простую цепь $P_i = v_0 v_1 \ldots v_i$ длины i.
Если $i = \delta(G)$, то P_i — искомая простая цепь.
Пусть $i < \delta(G)$. Т. к. $d_G(v_i) \geqslant \delta(G)$, найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, не совпадающая ни с одной из вершин $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}$, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Добавим эту вершину v_{i+1} к цепи P_i, т. е. построим простую цепь $P_{i+1} = v_0 v_1 \ldots v_i v_{i+1}$ длины $(i + 1)$.
Через $\delta(G)$ шагов мы получим искомую простую цепь.

Свойства путей и цепей

Доказательство.
2. б) Пусть мы построили простую цепь $P_m = v_0 v_1 \dots v_m$ длины $m = \delta(G)$. Если найдется такая вершина v_{m+1}, не совпадающая с вершинами $v_0, v_1, \dots, v_m$, что $(v_m, v_{m+1}) \in E$, то добавим эту вершину v_{m+1} к цепи P_m, т. е. построим простую цепь $P_{m+1} = v_0 v_1 \dots v_m v_{m+1}$ длины $(m+1)$.
Так будем действовать до тех пор, пока не получим такую простую цепь $P_{m'} = v_0 v_1 \dots v_m \dots v_{m'}$ длины m', $m' \geqslant m$, что все вершины, с которыми связана вершина $v_{m'}$, лежат на цепи $P_{m'}$.
Пусть v_{i_0}, $i_0 < m'$, — вершина с наименьшим номером на цепи $P_{m'}$, с которой связана вершина $v_{m'}$. Тогда искомый простой цикл $C = v_{i_0} \dots v_{m'} v_{i_0}$.

□

Подграфы

Граф $H = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Операции над графами:

Граф $G - e$, где $e \in E$: $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Граф $G - v$, где $v \in V$, — граф с множеством вершин $V \setminus \{v\}$ и с множеством ребер E без всех ребер с концами в вершине v.

Граф $G + e$, где $e = (v, w)$, $e \notin E$:
$G + e = (V \cup \{v, w\}, E \cup \{e\})$.

Связность

Граф $G = (V, E)$ называется **связным**, если для каждой пары вершин $v, w \in V$ в графе G существует (v, w)-путь (а значит, и простая (v, w)-цепь).

Максимальный (по включению) связный подграф графа G называется его **компонентой связности**.

Если G — связный граф, то у графа G одна компонента связности.

Пример: связная сеть

Связная сеть — p узлов с такими соединениями между ними, что из каждого узла можно достигнуть любой другой узел (возможно, проходя через промежуточные узлы).

Свойства связных графов

Предложение 3. *Пусть* $G = (V, E)$ *— связный граф без петель и кратных ребер. Тогда*
1) *в графе* $G_1 = G + e$, *где* $e = (v, w) \notin E$, $v, w \in V$, *найдется цикл;*
2) *граф* $G_2 = G - e$, *где ребро* e *принадлежит циклу, является связным.*

Свойства связных графов

Доказательство.
1. Граф G — связный, поэтому в нем найдется (v, w)-путь. Если в этом пути есть повторяющиеся вершины, то выбросим из него части между двумя повторами одной и той же вершины. Так получим простую (v, w)-цепь P в графе G. В графе G_1 простая цепь P также содержится. Тогда $C = vPw(w, v)v$ — искомый цикл в графе G_1.

Свойства связных графов

Доказательство.
2. Пусть ребро e принадлежит циклу C в графе G. Рассмотрим две произвольные вершины v, w в графе G_2. Эти же вершины принадлежат графу G. Граф G — связный, поэтому в графе G найдется (v, w)-путь P. Если путь P не проходит через ребро e, то он содержится и в графе G_2. Если же путь P проходит через ребро e, то заменим в нем это ребро ребрами, принадлежащими оставшейся части цикла C. Получим (v, w)-путь в графе G_2.

□

Число компонет связности

Предложение 4. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер с p вершинами, q ребрами и s компонентами связности. Тогда*
1) $s \geqslant p - q$;
2) *если в графе G отсутствуют циклы, то* $s = p - q$.

Число компонет связности

Доказательство.
1. Рассмотрим переход от графа $G_i = (V, E_i)$ к графу $G_{i+1} = G_i + e$, где $E_i \subseteq E$, $e \in E \setminus E_i$. Пусть в графах G_i, G_{i+1} соответственно s_i, s_{i+1} компонет связности. Тогда если ребро e соединяет вершины из одной компоненты связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i$; и если ребро e соединяет вершины из разных компонент связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому

$$s_{i+1} \geqslant s_i - 1.$$

Граф G можно получить из графа $G_0 = (V, \emptyset)$ с p компонентнами связности последовательным добавлением всех ребер множества E. Поэтому $s \geqslant p - q$.
2. Если же в графе G нет циклов, то в предыдущих рассуждениях верно $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому $s = p - q$.

□

k-связность

Граф $G = (V, E)$ называется k-**связным**, если при удалениии из него не более $(k - 1)$ любых вершин остается связный граф.

Двусвязный граф называется также **неразделимым** графом, или **блоком**.

Граф $G = (V, E)$ называется **реберно** k-**связным**, если при удалениии из него не более $(k - 1)$ любых ребер остается связный граф.

Деревья

Деревом называется связный граф без циклов.

Теорема 1. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф с* p *вершинами и* q *ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны*:
1) G *— дерево*;
2) G *— связный граф и* $q = p - 1$;
3) G *— граф без циклов и* $q = p - 1$;
4) G *— граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появится цикл*;
5) G *— связный граф, но при удалении любого ребра останется несвязный граф*.

Свойства деревьев

Предложение 5.
1. *Любое дерево с* $p \geqslant 2$ *вершинами содержит хотя бы две висячие вершины.*
2. *В любом дереве с* p *вершинами содержит* $q = p - 1$ *ребер.*
3. *В любом дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью.*
4. *Если к дереву добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то появится ровно один простой цикл.*
5. *Если из дерева удалить ребро, то останется граф с двумя компонентами связности.*

Свойства деревьев

Доказательство.
1. Доказывается от противного, что в дереве найдется хотя бы одна висячая вершина. Затем опять от противного, что в дереве найдется не менее двух висячих вершин.
2. Следует из зависимости между числом вершин, ребер и компонент связности в графе, т. к. в дереве нет циклов.
3. Если какие-то вершины соединены более, чем одной простой цепью, то из объединения двух из этих цепей можно выделить цикл, чего не может быть.
4. Ровно один простой цикл появится, т. к. по свойству 3 эти вершины в исходном дереве соединены ровно одной простой цепью.
5. Следует из свойств связных графов, т. к. в дереве нет циклов.

□

Корневые деревья

Корневым деревом называется пара $(D; v_0)$, где $D = (V, E)$ — дерево, $v_0 \in V$ — выделенная вершина, называемая **корнем**.

При изоморфизме корневых деревьев корень обязан переходить в корень.

Висячая вершина корневого дерева, не являющаяся корнем, называется **листом**.

Поддеревья в корневом дереве

Пусть $(D; v_0)$ — корневое дерево, и $(v_0, v_1), \ldots, (v_0, v_m)$ — все ребра, исходящие из вершины v_0 в дереве D.
Тогда каждая компонента связности графа $G - v_0$ является деревом, и пусть $D_1, \ldots, D_m$ — все эти деревья.
Каждое из корневых деревьев $(D_i; v_i)$ называется **поддеревом** корневого дерева D, $i = 1, \ldots, m$.

Обходом в глубину из вершины v_0 назовем следующий обход дерева D:
1) перейти в непройденное поддерево D_i, обойти его в глубину из вершины v_i и вернуться в вершину v_0;
2) если пройдены все поддеревья, то закончить обход.

Корневые деревья

Предложение 6. *Число неизоморфных корневых деревьев с $p \geqslant 3$ вершинами не менее, чем в два раза, превосходит число неизоморфных деревьев с p вершинами без корня.*

Доказательство. Пусть $D = (V, E)$ — дерево, $|V| = p \geqslant 3$.
В дереве D найдется висячая вершина $v_1 \in V$. Положим $(D; v_1)$ — первое корневое дерево.
Т. к. D — связный граф, в множестве V найдется такая вершина $v_2 \in V$, что $d_D(v_2) \geqslant 2$. Положим $(D; v_2)$ — второе корневое дерево.
Корневые деревья $(D; v_1)$ и $(D; v_2)$ — неизоморфны, т. к. их корни имеют разные степени.

□

Остовные деревья

Остовным деревом связного графа G называется его подграф D со всеми вершинами, являющийся деревом.

Предложение 7. *В каждом связном графе* $G = (V, E)$ *найдется остовное дерево.*
Доказательство (1-й способ). Если в графе G нет циклов, то он является своим остовным деревом.

Иначе, рассмотрим в графе G цикл. Пусть e — ребро из этого цикла. Повторим рассуждения для графа $G - e$, который также является связным.

Т. к. на каждом шаге мы разрываем хотя бы один цикл графа G, а циклов конечное число, то через конечное число шагов мы получим дерево. Оно и есть остовное дерево графа G.

Остовные деревья

Доказательство (2-й способ). Пусть $V = \{v_1, \dots, v_p\}$.

Шаг 1. Пусть $D_1 = (V_1, \emptyset)$, где $V_1 = \{v_1\}$.

Шаг $(i+1)$, где $i < p-1$. Пусть на шаге i построено дерево $D_i = (V_i, E_i)$, где $V_i \subseteq V$, $|V_i| = i$ и $E_i \subseteq E$.

Т. к. G — связный граф, найдется хотя бы одно такое ребро $e = (u, w) \in E$, что один его конец u лежит в V_i, а другой конец w лежит в $V \setminus V_i$. Тогда пусть $D_{i+1} = (V_i \cup \{w\}, E_i \cup e)$.

Дерево D_p — остовное для графа G.

$\square$

Задача о неизбыточной сети

Пусть найдутся p узлов с соединениями между некоторыми из них. Какое наименьшее число соединений нужно оставить, чтобы достижимость из произвольного узла каждого другого узла не нарушилась?

Последовательная нумерация вершин

Пусть $G = (V, E)$ — граф, $v_1 \in V$ — произвольная вершина графа G, и D — его остовное дерево с корнем в вершине v_1.

Обойдем дерево D в глубину, начиная с корня v_1. При этом обходе припишем вершине v_1 номер 1, а затем каждой встречающейся новой вершине будем приписывать следующий номер.

После такого обхода окажется, что каждая вершина v графа G, кроме вершины v_1, смежна с некоторой вершиной с меньшим номером.

Такую нумерацию вершин графа G назовем **последовательной**.

Задачи

1. Найти число неизоморфных графов $G = (V, E)$ (без петель к кратных ребер), если:

1) $|V| = 4$;
2) $|V| = 5$ и G — несвязный граф без изолированных вершин;
3) $|V| = 6$, $|E| = 7$ и в G ровно 2 висячие вершины;
4) $|V| = 6$, $|E| = 12$.

Изобразить эти неизоморфные графы.

2. Найти число неизоморфных деревьев $D = (V, E)$, если:

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 6$ и в D ровно 3 висячие вершины;
4) $|E| = 6$ и в D ровно 4 висячие вершины.

Изобразить эти неизоморфные деревья.

Задачи

3. Найти число неизоморфных корневых деревьев $(D; v_0)$, $D = (V, E)$, $v_0 \in V$, если:

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 6$ и в D ровно 3 листа;
4) $|E| = 6$ и в D ровно 4 листа.

Изобразить эти неизоморфные корневые деревья.

4. Найти число неизоморфных остовных
а) деревьев; б) корневых деревьев в графе G, если:

1) $G = K_3$;
2) $G = K_4$;
3) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4;
4) $G = K_{2,3}$.

Изобразить эти неизоморфные деревья.

Задачи

5. В дереве D ровно 156 вершин степени 4, остальные вершины — степени 1 или 2. Найти число вершин степени 1 в дереве D.

6. Связный граф G содержит 295 концевых вершин, остальные его вершины имеют степень 2 или 3. Кроме того, в графе G ровно один цикл. Найти число вершин степени 3 в графе G.

7. Сформулировать определение изоморфизма для псевдографов.

8. Верны ли предложения 1–4

1) для мультиграфов;
2) для псевдографов?

Если верны, то обосновать; если не верны, то указать, как надо изменить формулировки, чтобы они стали верными.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 9–11, 17, 22–25, 26–27, 53–55.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 22–28, 48–51.

Конец лекции