

# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 34

Задачи и проблемы  
Алгоритмы  
Разрешимость  
M-сводимость

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

# Вступление

Корректность и полнота метода семантических таблиц:

$\models \varphi \Leftrightarrow$  для таблицы  $\langle \mid \varphi \rangle$  **существует** успешный вывод

Корректность и полнота метода резолюций:

$\models \varphi \Leftrightarrow$  для системы дизъюнктов ... **существует** успешный вывод

Корректность и полнота НИП:

$\models \varphi \Leftrightarrow$  **существует** доказательство секвенции  $\vdash \varphi$

А можно ли написать программу, которая сможет автоматически проверить общезначимость **любой** формулы  $\varphi$  логики предикатов?

Оказывается, что написать такую программу **невозможно**, и пришла пора это строго сформулировать и обосновать (**теорема Чёрча**)

Аналогичные утверждения для других задач, как и бóльшая часть сопутствующих определений, известны вам из других курсов, но всё же полезно будет всё это повторить ещё раз

# Задачи и проблемы

У Васи есть 5 яблок. 2 яблока он отдал Коле.  
Сколько яблок осталось у Васи?

Это пример того, что принято называть **задачей**

Более точно, это **индивидуальная задача**:

задача с конкретными входными данными и конкретным ответом (3)

У Васи есть  $N$  яблок.  $K$  яблок ( $K \leq N$ ) он отдал Коле.  
Сколько яблок осталось у Васи?

Это также пример того, что принято называть **задачей**

Ответ к этой задаче определяется значениями **параметров** (входными данными)  $N$  и  $K$

Такие (*параметризованные*) задачи принято называть **массовыми задачами**, или, по-другому, **проблемами**

# Задачи и проблемы

Массовую задачу  $\mathfrak{I}$  можно понимать как отображение  $\mathfrak{I} : \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{D}$ , где

- ▶  $\mathfrak{J}$  — множество всевозможных **входных данных** (**входов**)
- ▶  $\mathfrak{D}$  — множество всевозможных **выходных данных** (**выходов**; **ответов**)
- ▶ значение  $\mathfrak{I}(i)$  — **правильный ответ** для входа  $i$

**Например**, последняя задача о яблоках — это отображение

$\mathfrak{I} : \{(n, k) \mid n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , где

- ▶  $\mathbb{N}_0$  — множество всех неотрицательных целых чисел
- ▶  $\mathfrak{I}(n, k) = n - k$

# Алгоритмы и разрешимость

**Алгоритм** — это особая совокупность действий,<sup>1</sup> согласно которой **входы** заданного множества  $\mathcal{I}$  преобразуются в **ответы** заданного множества  $\mathcal{D}$  (или не преобразуются, если применяется бесконечно много действий)<sup>2</sup>

Алгоритмом  $\mathcal{A}$  **реализуется** *частично определённое* отображение  $\bar{\mathcal{A}}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$  следующего вида:

- ▶ если к входу  $i$  применяется конечное число действий, то  $\bar{\mathcal{A}}(i)$  — ответ, вычисляемый алгоритмом
  - ▶ и алгоритм **останавливается** (**завершается**) на входе  $i$
- ▶ иначе значение  $\bar{\mathcal{A}}(i)$  не определено
  - ▶ и алгоритм **не останавливается** (**не завершается**) на входе  $i$

---

1 Вспоминайте из других курсов, какая именно совокупность каких действий

2 На самом деле бывают и другие алгоритмы, согласно которым выходные данные получаются многократно, или постоянно, или понятие выходных данных отсутствует — но не будем всё переусложнять

# Алгоритмы и разрешимость

Алгоритмы<sup>1</sup> придумываются для того, чтобы **решать** **массовые задачи**

Алгоритм  $\mathcal{A}$  **решает** задачу  $\mathcal{T} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}$ , если  $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{T}$ , то есть

- ▶  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{T}$  определены для одинаковых множеств входных и выходных данных, и
- ▶  $\mathcal{A}$  завершается на любом входе и всегда вычисляет правильный ответ к задаче  $\mathcal{T}$

Массовая задача (**алгоритмически**) **разрешима**, если существует алгоритм, решающий эту задачу, и **неразрешима**, если такого алгоритма не существует

---

<sup>1</sup> Как минимум такие алгоритмы, как на предыдущем слайде

# M-сводимость

**Задача распознавания** — это массовая задача

с множеством ответов **{да, нет}** (оно же  $\{1, 0\}$ , оно же  $\{t, f\}$ )

Задача  $\mathfrak{T}_1 : \mathfrak{I}_1 \rightarrow \{1, 0\}$  **m-сводится** (или **m-сводима**)<sup>1</sup>

к задаче  $\mathfrak{T}_2 : \mathfrak{I}_2 \rightarrow \{1, 0\}$ , если существует алгоритм  $\mathcal{A}$ , такой что

- ▶  $\bar{\mathcal{A}} : \mathfrak{I}_1 \rightarrow \mathfrak{I}_2$  — всюду определённое отображение и
- ▶ для любого входа  $i$  задачи  $\mathfrak{T}_1$  верно  $\mathfrak{T}_1(i) = \mathfrak{T}_2(\mathcal{A}(i))$

Обозначенный алгоритм  $\mathcal{A}$  **сводит** задачу  $\mathfrak{T}_1$  к задаче  $\mathfrak{T}_2$

**Например**, если

$\mathfrak{T}_1$  — задача проверки чётности целого числа

$$(\mathfrak{T}_1(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k : x = 2k) \text{ и}$$

$\mathfrak{T}_2$  — задача проверки делимости целого числа на 8

$$(\mathfrak{T}_2(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k : x = 8k), \text{ то}$$

алгоритм  $\mathcal{A}$  умножения целого числа на 4 ( $\bar{\mathcal{A}}(x) = 4x$ ) m-сводит  $\mathfrak{T}_1$  к  $\mathfrak{T}_2$ :

$$\mathfrak{T}_1(x) = \mathfrak{T}_2(4x) = \mathfrak{T}_2(\bar{\mathcal{A}}(x))$$

---

<sup>1</sup> Есть много видов сводимости, и этот вид (*должен быть*) вам известен из рассказа про останов и самоприменимость в курсе, посвящённом алгоритмам. Других видов в курсе не будет, так что можете не думать над тем, что означает «m»

# M-сводимость

**Теорема (об m-сводимости).** Если задача  $\mathfrak{T}_1$  m-сводится к разрешимой задаче  $\mathfrak{T}_2$ , то задача  $\mathfrak{T}_1$  также разрешима

**Доказательство.**<sup>1</sup>

Положим, что задача  $\mathfrak{T}_2$  разрешима и что задача  $\mathfrak{T}_1$  m-сводится к  $\mathfrak{T}_2$

По определению разрешимости, существует алгоритм  $\mathcal{A}$ , решающий  $\mathfrak{T}_2$

По определению m-сводимости,

существует алгоритм  $\mathcal{B}$ , сводящий  $\mathfrak{T}_1$  к  $\mathfrak{T}_2$

Тогда существует и алгоритм решения задачи  $\mathfrak{T}_1$ :

последовательно применим  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{A}$  к входу  $i$  задачи  $\mathfrak{T}_1$   $(i \xrightarrow{\mathcal{B}} j \xrightarrow{\mathcal{A}} o)$

По выбору алгоритма  $\mathcal{A}$ ,  $\overline{\mathcal{A}}(\overline{\mathcal{B}}(i)) = \mathfrak{T}_2(\overline{\mathcal{B}}(i))$

По выбору алгоритма  $\mathcal{B}$ ,  $\mathfrak{T}_2(\overline{\mathcal{B}}(i)) = \mathfrak{T}_1(i) \blacktriangledown$

**Следствие.** Если неразрешимая задача  $\mathfrak{T}_1$  m-сводится к задаче  $\mathfrak{T}_2$ , то задача  $\mathfrak{T}_2$  также неразрешима

<sup>1</sup> Это доказательство (должно быть) вам известно из курса, посвящённого алгоритмам. Повторим его «для профилактики».



# M-сводимость

## Иллюстрация теоремы

Мой сосед умеет проверять (алгоритмом  $\mathcal{A}$ ), делится ли целое число нацело на 8:

$$\mathfrak{T}_2(x) = 1 \Leftrightarrow x = 8k$$

Я хочу научиться решать задачу проверки чётности целого числа:

$$\mathfrak{T}_1(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2m$$

Тогда я могу организовать алгоритм решения своей задачи  $\mathfrak{T}_1$  так:

1. Умножить входное число на 4 подходящим алгоритмом  $\mathcal{B}$ :

$$\overline{\mathcal{B}}(x) = 4x$$

2. Спросить у соседа, делится ли полученное число на 8:

$$\mathfrak{T}_2(\overline{\mathcal{B}}(x)) = \overline{\mathcal{A}}(\overline{\mathcal{B}}(x)) = ?$$

3. Получив ответ от соседа, выдать его за свой:

$$\overline{\mathcal{A}}(\overline{\mathcal{B}}(x)) = \mathfrak{T}_1(x)$$

# M-сводимость

## Иллюстрация следствия

Мой сосед знает, что

проблема самоприменимости машин Тьюринга ( $\mathfrak{T}_1$ ) неразрешима

Я хочу научиться решать проблему останова машин Тьюринга ( $\mathfrak{T}_2$ )

Сосед

- ▶ убеждает меня в неразрешимости  $\mathfrak{T}_1$  и
- ▶ объясняет, как по произвольному входу  $i$  к своей задаче построить вход  $\bar{B}(i)$  к моей задаче, такой что

$$\mathfrak{T}_1(i) = \mathfrak{T}_2(\bar{B}(i))$$

Если бы вдруг я научился решать  $\mathfrak{T}_2$ ,

то мой сосед научился бы решать  $\mathfrak{T}_1$  с моей помощью так, как это обозначено в иллюстрации теоремы

Значит, моя задача  $\mathfrak{T}_2$  неразрешима