

Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 2

Логика высказываний:
синтаксис, семантика,
выполнимость, общезначимость

Метод семантических таблиц
в логике высказываний

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

A

Можно ли сказать, что это “простое высказывание”?

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет



Здесь есть **причинно-следственная связь** ...

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно интерпретировать как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$A \rightarrow B$

... между двумя простыми высказываниями

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно интерпретировать как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$A \rightarrow \neg B$$

A одно из высказываний можно сделать ещё проще

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно интерпретировать как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$A \rightarrow \neg B$$

Логика высказываний: вступление

После формализации высказывания получилось что-то очень похожее на **формулу булевой алгебры**, но не совсем:

Какой смысл имеет построенное высказывание?

Булева алгебра:

значение формулы — это булева функция:

A	B	$A \rightarrow \neg B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логика высказываний: ?

Логика высказываний: вступление

Для языка логики высказываний будут описаны

- алфавит:** набор символов, используемых в языке
- синтаксис:** правила, по которым из символов строятся высказывания языка (**формулы**)
- семантика:** значение этих высказываний

Затем будут

- ▶ строго сформулированы основные логические свойства формул (**выполнимость, невыполнимость, общезначимость**)
- ▶ описаны **логические** средства проверки этих свойств (**метод семантических таблиц**)

Алфавит, синтаксис

Алфавит

Множество пропозициональных переменных	Var
Логические связи	& \vee \rightarrow \neg
Скобки	()

Синтаксис — составление, построение, порядок;¹
раздел грамматики — наука о
законах соединения слов и строения предложения²

Для задания синтаксиса в курсе будут использоваться формы Бэкуса-Наура (БНФ): совокупности определений вида
символ ::= запись1 | запись2 | ... | записьN,
расшифровывающихся так: “*символ* — это *запись1* или *запись2*
или ... *записьN*, и других способов записи *символа* нет”

¹ *συνταξισ* (древнегреческий)

² Ожегов. Толковый словарь

Синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики высказываний:

$$\varphi ::= x \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi),$$

где φ — формула и $x \in \text{Var}$

При этом формула вида x называется атомарной (атомом),

а формулы других видов

$((\varphi \& \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg \varphi))$ — составными

Приоритет связок: \neg , затем $\&$, затем \vee , затем \rightarrow

Скобки можно опускать согласно приоритету связок,

а также согласно ассоциативности связок $\&$ и \vee

$\varphi = \psi$ — так в курсе будет обозначаться посимвольное (синтаксическое) совпадение формул φ и ψ

Семантика

Семантика — значение, смысл¹

Значение формулы определяется значениями её атомов

Значения атомов задаются **интерпретацией** — отображением

$$\mathcal{I} : \text{Var} \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$$

Значение $\mathcal{I}(\varphi)$ составной формулы φ в интерпретации \mathcal{I} определяется так:

$$\mathcal{I}(\varphi \& \psi) = \mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \text{ и } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t}$$

$$\mathcal{I}(\varphi \vee \psi) = \mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t}$$

$$\mathcal{I}(\varphi \rightarrow \psi) = \mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t}$$

$$\mathcal{I}(\neg\varphi) = \mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f}$$

В логике принято использовать немного другие обозначения:

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \quad (\text{формула } \varphi \text{ выполняется в } \mathcal{I})$$

$$\mathcal{I} \not\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f} \quad (\text{формула } \varphi \text{ не выполняется в } \mathcal{I})$$

¹ Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Семантика

Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\} \quad \varphi = A \rightarrow \neg B \quad \mathcal{I}(A) = \mathbf{f}, \mathcal{I}(B) = \mathbf{t}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \not\models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \mathbf{t})$$

$$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \mathbf{f})$$

Содержательное пояснение

Пусть A — высказывание “Я прогуливаю лекции”

B — высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

Тогда \mathcal{I} — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(A) = \mathbf{f}$: я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I}(B) = \mathbf{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B$: тот, кто сказал

“Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

Семантика

Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\} \quad \varphi = A \rightarrow \neg B \quad \mathcal{I}(A) = \mathbf{f}, \mathcal{I}(B) = \mathbf{f}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \mathbf{f})$$

$$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \mathbf{f})$$

Содержательное пояснение

Пусть A — высказывание “Я прогуливаю лекции”

B — высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

Тогда \mathcal{I} — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(A) = \mathbf{f}$: я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I}(B) = \mathbf{f}$: из этого не выйдет ничего хорошего

$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B$: тот, кто сказал

“Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

Семантика

Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\} \quad \varphi = A \rightarrow \neg B \quad \mathcal{I}(A) = \mathbf{t}, \mathcal{I}(B) = \mathbf{t}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \not\models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \mathbf{t})$$

$$\mathcal{I} \not\models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \mathbf{t} \text{ и } \mathcal{I}(\neg B) = \mathbf{f})$$

Содержательное пояснение

Пусть A — высказывание “Я прогуливаю лекции”

B — высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

Тогда \mathcal{I} — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(A) = \mathbf{t}$: я прогуливаю лекции

$\mathcal{I}(B) = \mathbf{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \not\models A \rightarrow \neg B$: тот, кто сказал

“Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего”, **неправ**

Выполнимость и общезначимость

Основные свойства формул,
исследуемые в рамках логики высказываний:

- ▶ Формула φ **выполнима** ($\models \varphi^1$), если существует интерпретация \mathcal{I} , такая что $\mathcal{I} \models \varphi$
- ▶ Формула φ **невыполнима** ($\not\models \varphi^1$), если для любой интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- ▶ Формула φ **общезначима** ($\vDash \varphi$), если для любой интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Логика высказываний

Булева алгебра

φ выполнима

\Leftrightarrow

φ выполнима

φ невыполнима

\Leftrightarrow

φ — тождественный ноль

φ общезначима

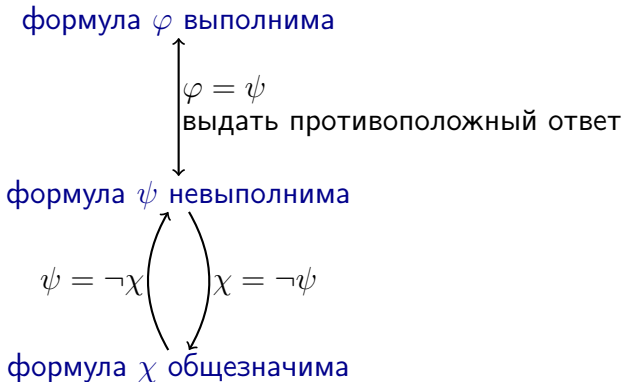
\Leftrightarrow

φ — тождественная единица

¹ Это необщепотребимое обозначение, используется **только** в слайдах

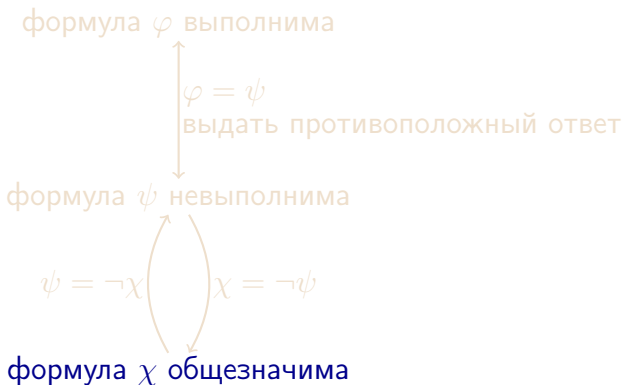
Выполнимость и общезначимость

Выполнимость, невыполнимость и общезначимость — это “почти одно и то же”:



Проверка каждого из этих свойств может быть легко сведена к проверке каждого другого свойства

Метод семантических таблиц



Далее рассматривается задача

проверки общезначимости (булевых) формул

Метод семантических таблиц

Чтобы проверить общезначимость формулы φ методами булевой алгебры, достаточно вычислить столбец значений реализуемой функции и проверить, содержит ли он хотя бы один 0

В терминах логики это перебор всех интерпретаций и вычисление значения φ в каждой из них

Метод семантических таблиц выполняет такой перебор, по возможности сокращая его:

- ▶ предположим, что формула φ необщезначима, и попробуем построить интерпретацию \mathcal{I} , такую что $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- ▶ на каждом шаге алгоритма имеем формулы, предполагаемые истинными и ложными в \mathcal{I} , и из готовых предположений получаем новые с “более простыми” формулами
- ▶ если все предположения привели к противоречивым требованиям к \mathcal{I} , то формула признаётся общезначимой, а иначе получается конструктивное описание интерпретации \mathcal{I}

Метод семантических таблиц

Семантическая таблица (логики высказываний) — это пара множеств формул: $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$

Таблица T **выполнима**, если существует интерпретация \mathcal{I} , такая что для любой формулы $\varphi \in \Gamma$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$, а для любой формулы $\psi \in \Delta$ верно $\mathcal{I} \not\models \psi$

закрита, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

атомарна, если все формулы из Γ и Δ атомарны

Содержательное пояснение:

Таблица T — это предположение о том, что формулы из Γ истинны, а формулы из Δ ложны

Выполнимая таблица — это предположение, верное хотя бы в одной интерпретации

Закрытая таблица — это очевидно неверное предположение

Атомарная незакрытая таблица — это явное описание интерпретаций \mathcal{I} , в которых предположение верно

Метод семантических таблиц

Для краткости иногда будем опускать фигурные скобки в записи множеств семантической таблицы

Утверждение

$\models \varphi \Leftrightarrow$ семантическая таблица $\langle \mid \varphi \rangle$ невыполнима

Утверждение. Любая закрытая таблица невыполнима

Утверждение

Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство.

Тривиально (следует из определений)

Метод семантических таблиц

Чтобы уметь доказывать общезначимость формулы φ , достаточно разработать правила преобразования таблиц, позволяющие свести **неявное противоречие** (невыполнимую таблицу) к **явному противоречию** (набору закрытых таблиц), и последовательно применять эти правила, начав с таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$

Доказательства такого вида называются **логическим выводом**

Вывод, в котором участвуют семантические таблицы, принято называть **табличным**, а правила преобразования семантических таблиц — **правилами табличного вывода**

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода имеют следующий вид:

$$(*) : \frac{T_0}{T_1}, \quad (**): \frac{T_0}{T_1, T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Правила прочитываются так:

(*): таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1

(**): таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима хотя бы одна из таблиц T_1, T_2

Таблицы T_1, T_2 под чертой в правилах иногда называют **альтернативами**

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\&: \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\vee: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\rightarrow: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

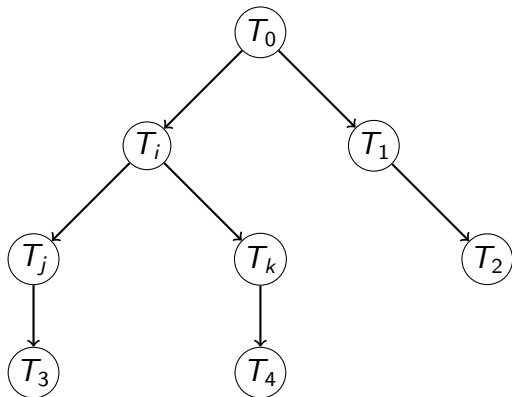
$$L\neg: \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

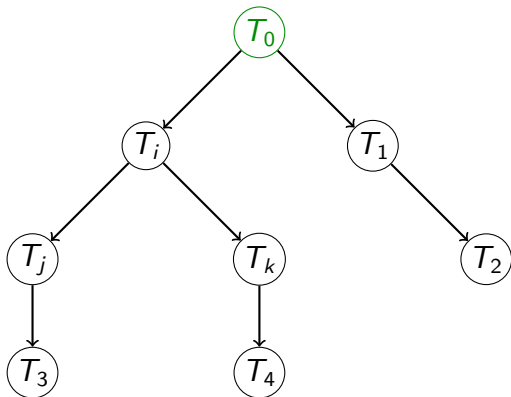
- его вершинам приписаны семантические таблицы



Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

- его корню приписана таблица T_0

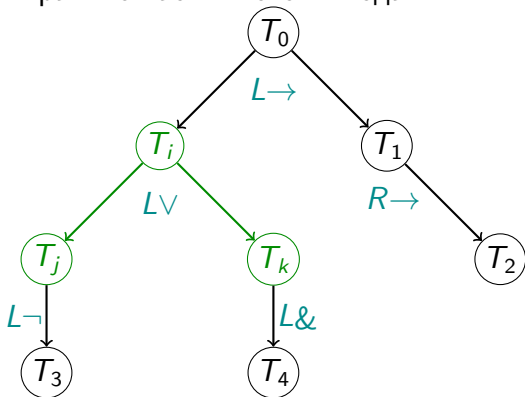


Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

3. из T_i исходят дуги в T_j (и T_k) \Leftrightarrow

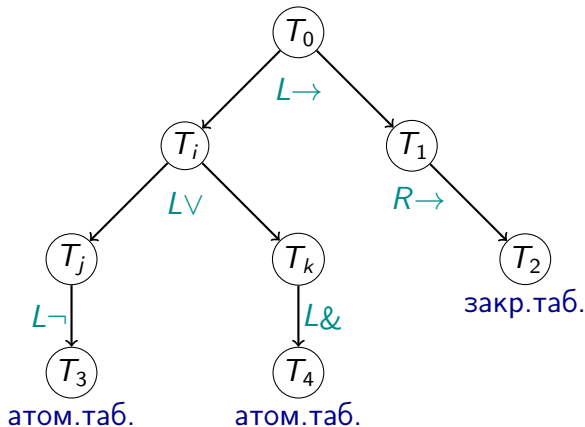
$\frac{T_i}{T_j, T_k}$ — правило табличного вывода



Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

- метки его листьев — закрытые или атомарные таблицы



Метод семантических таблиц

Табличный вывод **успешен**, если он **конечен** и все его листья помечены **закрытыми таблицами**

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица, для которой он построен, невыполнима (*докажем это позже*)

Если этот вывод построен для таблицы $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$, то $\models \varphi$

Семантическая таблица $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ **конечна**, если $\Gamma \cup \Delta$ — конечное множество формул

Утверждение

Любой табличный вывод в логике высказываний для любой конечной таблицы конечен

Доказательство.

Глубина вывода для таблицы $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ не превосходит $(N + 1)$, где N — суммарное число связок в формулах из $\Gamma \cup \Delta$ ▼

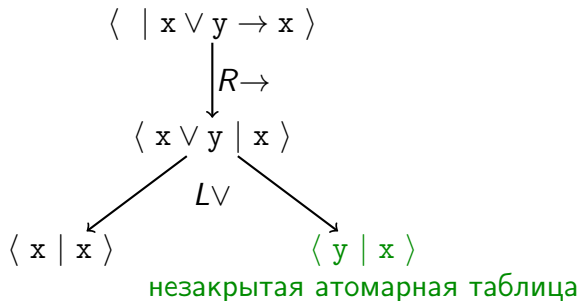
Табличный вывод: примеры

$$\begin{array}{c} \langle \mid x \rightarrow x \vee y \rangle \\ \downarrow R\rightarrow \\ \langle x \mid x \vee y \rangle \\ \downarrow R\vee \\ \langle x \mid x, y \rangle \\ \text{закрытая таблица} \end{array}$$

Вывод **успешен**

При этом $\models x \rightarrow x \vee y$

Табличный вывод: примеры



Вывод **неуспешен**

При этом $\not\models x \vee y \rightarrow x$

Табличный вывод: примеры

$$\langle \mid (x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow \neg x) \rangle$$

$\downarrow R_{\rightarrow}$

$$\langle x \rightarrow \neg y \mid y \rightarrow \neg x \rangle$$

$\downarrow R_{\rightarrow}$

$$\langle x \rightarrow \neg y, y \mid \neg x \rangle$$

$\downarrow R_{\neg}$

$$\langle x \rightarrow \neg y, y, x \mid \rangle$$

$\downarrow L_{\vee}$

$$\langle \neg y, y, x \mid \rangle$$

$$\langle y, x \mid x \rangle$$

закрытая таблица

$\downarrow L_{\neg}$

$$\langle y, x \mid y \rangle$$

закрытая таблица

Вывод успешен

При этом $\models (x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow \neg x)$

Метод семантических таблиц

Лемма(о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство.

Подробно остановимся только на правиле $L\rightarrow$: $\frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$

Пусть верхняя таблица выполнима — покажем, что тогда выполнима хотя бы одна из нижних таблиц

Определение выполнимости таблицы:

существует интерпретация \mathcal{I} , такая что

- ▶ для любой формулы χ' из Γ верно $\mathcal{I} \models \chi'$
- ▶ для любой формулы χ'' из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi''$
- ▶ $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$

Метод семантических таблиц

Лемма(о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1, T_2}$

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $\chi' \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \chi' \quad \chi'' \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \chi'' \quad \mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$

Так как $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$, верно хотя бы одно из двух:

- ▶ $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- ▶ $\mathcal{I} \models \psi$

Значит, хотя бы одна из таблиц $\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle$ выполнима

Рассуждения в обратную сторону
и для остальных связок аналогичны ▼

Метод семантических таблиц

Теорема (о табличном выводе в логике высказываний)

Пусть D — табличный вывод
для конечной семантической таблицы T .

Тогда таблица T невыполнима
в том и только в том случае, если вывод D успешен

Доказательство. Следует из
леммы о корректности правил табличного вывода,
конечности табличного вывода и
невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие. $\models \varphi \Leftrightarrow$ для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует
успешный табличный вывод

Следствие

$\models \varphi \Leftrightarrow$ все выводы для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ успешны