# Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

## Лекция 2

Логика высказываний:
синтаксис, семантика,
выполнимость, общезначимость

Метод семантических таблиц
в логике высказываний

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** можно рассмотреть такое предложение:

**Если будете прогуливать лекции,**

**то ничего хорошего из этого не выйдет**

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** можно рассмотреть такое предложение:

$$\underbrace{\begin{array}{l}\textbf{Если будете прогуливать лекции,} \\ \qquad\qquad\qquad\textbf{то ничего хорошего из этого не выйдет}\end{array}}_{A}$$

Можно ли сказать, что это “простое высказывание”?

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** можно рассмотреть такое предложение:

**Если будете прогуливать лекции,**

**то ничего хорошего из этого не выйдет**

$\rightarrow$

Здесь есть причинно-следственная связь . . .

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** можно рассмотреть такое предложение:

**Если будете прогуливать лекции,**

**то ничего хорошего из этого не выйдет**

$$\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}$$

. . . между двумя простыми высказываниями

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** можно рассмотреть такое предложение:

**Если будете прогуливать лекции,**

**то ничего хорошего из этого не выйдет**

$$\mathtt{A} \to \neg\, \mathtt{B}$$

А одно из высказываний можно сделать ещё проще

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** можно рассмотреть такое предложение:

**Если будете прогуливать лекции,**

**то ничего хорошего из этого не выйдет**

$$\boxed{A \rightarrow \neg B}$$

# Логика высказываний: вступление

После формализации высказывания получилось что-то очень похожее на **формулу булевой алгебры**, но не совсем:

Какой смысл имеет построенное высказывание?

**Булева алгебра**:
значение формулы — это булева функция:

| A | B | A $\to \neg$B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**Логика высказываний**: ?

# Логика высказываний: вступление

Для языка логики высказываний будут описаны

алфавит: набор символов, используемых в языке

синтаксис: правила, по которым из символов строятся высказывания языка (**формулы**)

семантика: значение этих высказываний

Затем будут

- строго сформулированы основные логические свойства формул (выполнимость, невыполнимость, общезначимость)
- описаны **логические** средства проверки этих свойств (метод семантических таблиц)

# Алфавит, синтаксис

## Алфавит

| | |
|---|---|
| Множество пропозициональных переменных | Var |
| Логические связки | $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ |
| Скобки | (, ) |

**Синтаксис** — составление, построение, порядок;[1]
раздел грамматики — наука о законах соединения слов и строении предложения[2]

Для задания синтаксиса в курсе будут использоваться формы Бэкуса-Наура (БНФ): совокупности записей вида

`символ ::= запись1 | запись2 | ... | записьN`,

расшифровывающихся так: “`символ` — это `запись1` или `запись2` или ... `записьN`, и других способов записи `символа` нет”

---

[1] $\sigma\upsilon\nu\tau\alpha\xi\iota\sigma$ (древнегреческий)

[2] Ожегов. Толковый словарь

# Синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики высказываний:

$$\varphi \;\; ::= \;\; \mathtt{x} \;\mid\; (\varphi \,\&\, \varphi) \;\mid\; (\varphi \vee \varphi) \;\mid\; (\varphi \to \varphi) \;\mid\; (\neg\varphi),$$

где $\varphi$ — формула и $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$

При этом формула вида $\mathtt{x}$ называется атомарной (атомом),
а формулы других видов
($(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi)$) — составными

**Приоритет связок**: $\neg$, затем $\&$, затем $\vee$, затем $\to$

Скобки можно опускать согласно приоритету связок,
а также согласно ассоциативности связок $\&$ и $\vee$

# Семантика

**Семантика** — значение, смысл[1]

Значение формулы определяется значениями её атомов

Значения атомов задаются интерпретацией — отображением

$$\mathcal{I} : \mathsf{Var} \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$$

Значение $\mathcal{I}(\varphi)$ составной формулы $\varphi$ в интерпретации $\mathcal{I}$ определяется так:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{I}(\varphi \mathbin{\&} \psi) = \mathbf{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \text{ и } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \vee \psi) = \mathbf{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \to \psi) = \mathbf{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t} \\
\mathcal{I}(\neg\varphi) = \mathbf{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f}
\end{array}$$

В логике принято использовать немного другие обозначения:

$\mathcal{I} \models \varphi$ (формула $\varphi$ выполняется в $\mathcal{I}$) ⇔ $\mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t}$

$\mathcal{I} \not\models \varphi$ (формула $\varphi$ не выполняется в $\mathcal{I}$) ⇔ $\mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f}$

---

[1] Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

# Семантика

## Пример

$$\mathrm{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots\} \qquad \varphi : \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B} \qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f},\ \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B} \qquad (\text{так как } \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t})$$

$$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B} \qquad (\text{так как } \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f})$$

*Содержательное пояснение*

$\mathtt{A}$: высказывание “Я прогуливаю лекции”

$\mathtt{B}$: высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

$\mathcal{I}$: мир, в котором я живу

- $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f}$: я прилежно хожу на лекции
- $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал “Если я прогуливаю лекции, то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

# Семантика

**Пример**

$$\mathrm{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots\} \qquad \varphi : \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B} \qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f},\ \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{f}$$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \models \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{f}$)

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f}$)

*Содержательное пояснение*

$\mathtt{A}$: высказывание “Я прогуливаю лекции”

$\mathtt{B}$: высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

$\mathcal{I}$: мир, в котором я живу

- $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f}$: я прилежно хожу на лекции
- $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{f}$: из этого не выйдет ничего хорошего

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал “Если я прогуливаю лекции, то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

# Семантика

**Пример**

$\mathrm{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots\}$ $\qquad \varphi : \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{t}, \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$)

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{t}$ *и* $\mathcal{I}(\neg\mathtt{B}) = \mathbf{f}$)

*Содержательное пояснение*

`A`: высказывание “Я прогуливаю лекции”

`B`: высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

$\mathcal{I}$: мир, в котором я живу

- $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{t}$: я прогуливаю лекции
- $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал “Если я прогуливаю лекции, то из этого не выйдет ничего хорошего”, **неправ**

# Выполнимость и общезначимость

Основные свойства формул, исследуемые в рамках логики высказываний:

- Формула $\varphi$ выполнима ($|\models \varphi$[1]), если существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \models \varphi$
- Формула $\varphi$ невыполнима ($|\not\models \varphi$), если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- Формула $\varphi$ общезначима ($\models \varphi$), если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$

| *Логика высказываний* | | *Булева алгебра* |
|---|---|---|
| $\varphi$ выполнима | $\Leftrightarrow$ | $\varphi$ выполнима |
| $\varphi$ невыполнима | $\Leftrightarrow$ | $\varphi \equiv 0$ |
| $\varphi$ общезначима | $\Leftrightarrow$ | $\varphi \equiv 1$ |

---

[1] Это необщеупотребимое обозначение, используется **только** в слайдах

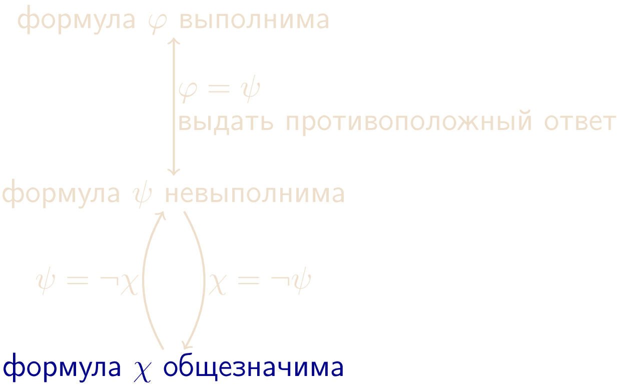
# Выполнимость и общезначимость

Выполнимость, невыполнимость и общезначимость - это “почти одно и то же”:

$$\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi \text{ выполнима} \arrow[d, leftrightarrow, "{\begin{array}{l}\varphi = \psi \\ \text{выдать противоположный ответ}\end{array}}"] \\
\text{формула } \psi \text{ невыполнима} \arrow[d, bend left, "\chi = \neg\psi"] \\
\text{формула } \chi \text{ общезначима} \arrow[u, bend left, "\psi = \neg\chi"]
\end{tikzcd}$$

Проверка каждого из этих свойств может быть легко **сведена** к проверке каждого другого свойства

# Метод семантических таблиц



формула $\varphi$ выполнима

$\varphi = \psi$

выдать противоположный ответ

формула $\psi$ невыполнима

$\psi = \neg\chi$

$\chi = \neg\psi$

формула $\chi$ общезначима

Далее рассматриваем задачу

проверки общезначимости (булевых) формул

# Метод семантических таблиц

Чтобы проверить общезначимость формулы $\varphi$ **методами булевой алгебры**, достаточно вычислить столбец значений реализуемой функции и проверить, содержит ли он хотя бы один 0

В терминах логики это перебор всех интерпретаций и вычисление значения $\varphi$ в каждой из них

Метод семантических таблиц выполняет такой перебор, по возможности сокращая его:

- предположим, что формула $\varphi$ необщезначима, и попробуем построить интерпретацию $\mathcal{I}$, такую что $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- на каждом шаге алгоритма имеем формулы, предполагаемые истинными и ложными в $\mathcal{I}$, и из готовых предположений получаем новые с “более простыми” формулами
- если **все** предположения привели к противоречивым требованиям к $\mathcal{I}$, то формула признаётся общезначимой

# Метод семантических таблиц

Семантическая таблица (логики высказываний) — это пара множеств формул: $T = \langle\ \Gamma \mid \Delta\ \rangle$

Таблица $T$ выполнима, если существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что для любой формулы $\varphi \in \Gamma$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$, а для любой формулы $\psi \in \Delta$ верно $\mathcal{I} \not\models \psi$

закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

атомарна, если все формулы из $\Gamma$ и $\Delta$ атомарны

*Содержательное пояснение:*

Таблица $T$ — это предположение о том, что формулы из $\Gamma$ истинны, а формулы из $\Delta$ ложны

Выполнимая таблица — это предположение, верное хотя бы в одной интерпретации

Закрытая таблица — это очевидно неверное предположение

Атомарная незакрытая таблица — это явное описание интерпретаций $\mathcal{I}$, в которых предположение верно

# Метод семантических таблиц

Для краткости иногда будем опускать фигурные скобки в записи множеств семантической таблицы

**Утверждение**

$\models \varphi$ $\Leftrightarrow$ **семантическая таблица** $\langle \ \mid \varphi \rangle$ **невыполнима**

**Утверждение. Любая закрытая таблица невыполнима**

**Утверждение**

**Любая незакрытая атомарная таблица выполнима**

Доказательство.

Это очень просто (следует из определений)

# Метод семантических таблиц

Чтобы уметь доказывать общезначимость формул, достаточно разработать правила преобразования таблиц, позволяющие свести неявное противоречие (невыполнимую таблицу) к явному противоречию (набору закрытых таблиц), и для каждой конкретной формулы последовательно применять эти правила

Доказательства такого вида называются логическим выводом

Вывод, в котором участвуют семантические таблицы, принято называть табличным, а правила преобразования семантических таблиц — правилами табличного вывода

# Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода имеют следующий вид:

$$(*)\colon\ \frac{T_0}{T_1}, \qquad (**)\colon\ \frac{T_0}{T_1,\ T_2},$$

где $T_0$, $T_1$, $T_2$ — семантические таблицы

Правила прочитываются так:

(*): **таблица $T_0$ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица $T_1$**

(**): **таблица $T_0$ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима хотя бы одна из таблиц $T_1$, $T_2$**

Таблицы $T_1$, $T_2$ в (**) — это альтернативы

# Метод семантических таблиц

## Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\& \quad \frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi,\ \psi \mid \Delta \,\rangle}$$

$$R\& \quad \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\&\, \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle, \langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \psi \,\rangle}$$

$$L\vee \quad \frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \vee \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta \,\rangle, \langle\, \Gamma,\ \psi \mid \Delta \,\rangle}$$

$$R\vee \quad \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \vee \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi,\ \psi \,\rangle}$$

$$L\to \quad \frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \to \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \psi \mid \Delta \,\rangle, \langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle}$$

$$R\to \quad \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \to \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta,\ \psi \,\rangle}$$

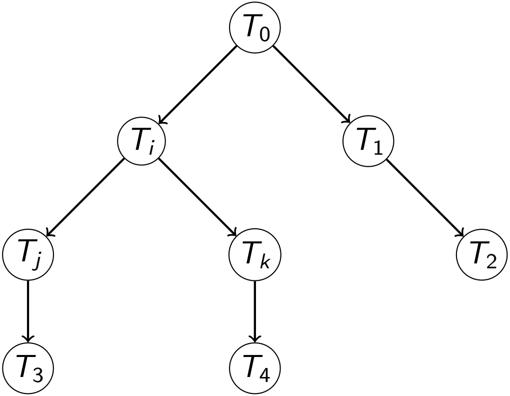
$$L\neg \quad \frac{\langle\, \Gamma,\ \neg\varphi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle}$$

$$R\neg \quad \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \neg\varphi \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta \,\rangle}$$

# Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы $T_0$ — это корневое дерево, такое что:

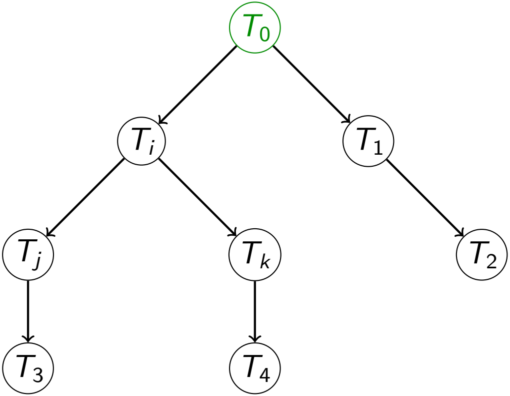
1. его вершинам приписаны семантические таблицы



# Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы $T_0$ — это корневое дерево, такое что:

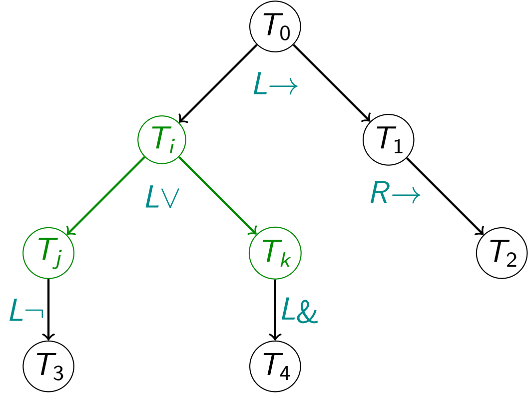
2. его корню приписана таблица $T_0$



# Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы $T_0$ — это корневое дерево, такое что:

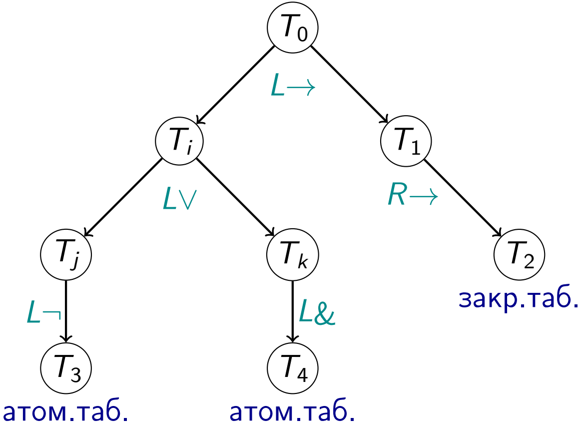
3. из $T_i$ исходят дуги в $T_j$ (и $T_k$) $\quad\Leftrightarrow$
   $\dfrac{T_i}{T_j, (T_k)}$ — правило табличного вывода



# Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы $T_0$ — это корневое дерево, такое что:

4. метки его листьев — закрытые или атомарные таблицы



# Метод семантических таблиц

Табличный вывод успешен, если он конечен и **все** его листья помечены закрытыми таблицами

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица, для которой он построен, невыполнима

Если он построен для таблицы $\langle\ \mid \varphi\ \rangle$, то $\models \varphi$

**Утверждение.** **Любой табличный вывод в логике высказываний для таблицы, содержащей конечное число формул, конечен**

Доказательство.
Глубина вывода для таблицы $\langle\ \Gamma \mid \Delta\ \rangle$ не превосходит $(N+1)$, где $N$ — суммарное число связок в формулах из $\Gamma$, $\Delta$ ▼

# Табличный вывод: примеры

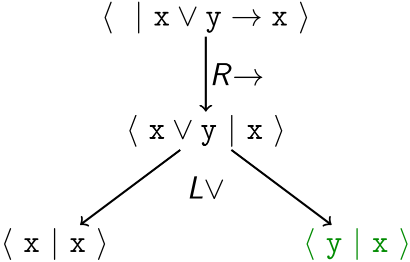
$$\begin{tikzcd}
\langle\ \mid \mathrm{x} \to \mathrm{x} \lor \mathrm{y} \rangle \arrow[d, "R\to"] \\
\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \lor \mathrm{y} \rangle \arrow[d, "R\lor"] \\
\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{x},\ \mathrm{y} \rangle
\end{tikzcd}$$

закрытая таблица

Вывод успешен

Итог: $\models \mathrm{x} \to \mathrm{x} \lor \mathrm{y}$

# Табличный вывод: примеры



$\langle \ \mid \mathrm{x} \vee \mathrm{y} \to \mathrm{x} \rangle$

$R{\to}$

$\langle \mathrm{x} \vee \mathrm{y} \mid \mathrm{x} \rangle$

$L{\vee}$

$\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \rangle$

$\langle \mathrm{y} \mid \mathrm{x} \rangle$

незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен

Итог: $\not\models \mathrm{x} \vee \mathrm{y} \to \mathrm{x}$

# Табличный вывод: примеры

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \ \mid (x \to \neg y) \to (y \to \neg x) \ \rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
 & \langle \ x \to \neg y \mid y \to \neg x \ \rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
 & \langle \ x \to \neg y, y \mid \neg x \ \rangle \arrow[d, "R\neg"] & \\
 & \langle \ x \to \neg y, y, x \mid \ \rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "L\vee"] & \\
\langle \ \neg y, y, x \mid \ \rangle \arrow[d, "L\neg"] & & \langle \ y, x \mid x \ \rangle \\
\langle \ y, x \mid y \ \rangle & & \text{закрытая таблица} \\
\text{закрытая таблица} & &
\end{tikzcd}$$

Вывод успешен

Итог: $\models (x \to \neg y) \to (y \to \neg x)$

# Метод семантических таблиц

Лемма(*о корректности правил табличного вывода*)

**Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1,\ (T_2)}$**

**$(L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg)$**

**таблица $T_0$ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица $T_1$ (или выполнима таблица $T_2$)**

Доказательство.

Подробно остановимся только на правиле $L\to$: $\frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi \to \psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \psi \mid \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle}$

Пусть верхняя таблица выполнима: существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \models \chi'$ для $\chi' \in \Gamma$, $\mathcal{I} \not\models \chi''$ для $\chi'' \in \Delta$, и $\mathcal{I} \models \varphi \to \psi$

Тогда верно хотя бы одно из двух: $\mathcal{I} \not\models \varphi$, $\mathcal{I} \models \psi$ — а значит, хотя бы одна из нижних таблиц выполнима

Рассуждения в обратную сторону и для других связок аналогичны

▼

# Метод семантических таблиц

**Теорема**(*о табличном выводе в логике высказываний*)
**Пусть $D$ — табличный вывод для семантической таблицы $T$, содержащей конечное число формул. Тогда таблица $T$ невыполнима в том и только в том случае, если вывод $D$ успешен**

Доказательство. Следует из леммы о корректности правил табличного вывода, конечности табличного вывода и невыполнимости закрытых таблиц ▼

**Следствие.** **$\models \varphi \Leftrightarrow$ для таблицы $\langle \ \mid \varphi \ \rangle$ существует успешный табличный вывод**

**Следствие**
**$\models \varphi \Leftrightarrow$ все выводы для таблицы $\langle \ \mid \varphi \ \rangle$ успешны**