Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2018, весенний семестр

Лекция 2

Логика высказываний:
синтаксис, семантика,
выполнимость, общезначимость

Метод семантических таблиц
в логике высказываний

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- истинности “простых” высказываний и
- “булевых” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- истинности “простых” высказываний и
- “булевых” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

$$\underbrace{\textbf{Если будете прогуливать лекции, то ничего хорошего из этого не выйдет}}_{A}$$

Можно ли сказать, что это “простое высказывание”?

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- истинности “простых” высказываний и
- “булевых” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\rightarrow$$

Здесь есть причинно-следственная связь . . .

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- истинности “простых” высказываний и
- “булевых” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}$$

... между двумя простыми высказываниями

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- истинности “простых” высказываний и
- “булевых” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\mathtt{A} \to \neg\ \mathtt{B}$$

А одно из высказываний можно сделать ещё проще

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- истинности “простых” высказываний и
- “булевых” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\boxed{\mathtt{A} \rightarrow \neg\ \mathrm{B}}$$

Логика высказываний: вступление

После формализации высказывания получилось что-то очень похожее на **формулу булевой алгебры**,
но не совсем:

Какой смысл имеет построенное высказывание?

Булева алгебра:
значение формулы — это булева функция:

A	B	$A \to \neg B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логика высказываний: ?

Логика высказываний: вступление

Для языка логики высказываний будут описаны

алфавит:	символы, используемые в языке
синтаксис:	правила, по которым из символов строятся высказывания языка (**формулы**)
семантика:	значение этих высказываний

Затем будут

- строго сформулированы интересующие нас свойства формул (выполнимость, невыполнимость, общезначимость)
- описаны **логические** средства проверки этих свойств (метод семантических таблиц)

Алфавит, синтаксис

Алфавит

Пропозициональные переменные	Var
Логические связки	$\&, \vee, \to, \neg$
Скобки	(,)

Синтаксис[1,2]

Что такое формула: (это индуктивное определение)

- $\mathtt{x}$ — атомарная формула, или атом ($\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$)
- Составные формулы: (φ, ψ — формулы)

$$(\varphi \,\&\, \psi) \qquad (\varphi \vee \psi) \qquad (\varphi \to \psi) \qquad (\neg\varphi)$$

- других формул нет

(этот пункт индуктивного определения будет опускаться)

Приоритет связок: $\neg$, потом $\&$, потом $\vee$, потом $\to$

Скобки можно опускать согласно приоритету

---

[1] $\sigma\upsilon\nu\tau\alpha\xi\iota\sigma$ (древнегреческий) — составление, построение, порядок

[2] Ожегов. Толковый словарь: Раздел грамматики — наука о законах соединения слов и о строении предложений

Семантика

Семантика[1] — это значение, смысл

Значение формулы полностью определяется значениями её атомов

Значения атомов задаются интерпретацией — отображением $\mathcal{I} : \mathsf{Var} \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$

Значение $\mathcal{I}(\varphi)$ составной формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ определяется так:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{I}(\varphi \,\&\, \psi) = \mathbf{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \text{ и } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \vee \psi) = \mathbf{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \to \psi) = \mathbf{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t} \\
\mathcal{I}(\neg\varphi) = \mathbf{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f}
\end{array}
$$

В логике принято использовать немного другие обозначения:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{I} \models \varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \\
\mathcal{I} \not\models \varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f}
\end{array}
$$

---

[1] Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Семантика

Пример

$\mathsf{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots\}$ $\qquad \varphi : \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f}$, $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$)

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f}$)

Содержательное пояснение

$\mathtt{A}$: высказывание “Я прогуливаю лекции”

$\mathtt{B}$: высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

$\mathcal{I}$: мир, в котором я живу

- $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f}$: я прилежно хожу на лекции
- $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал “Если я прогуливаю лекции, то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

Семантика

Пример

$\mathsf{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots\}$ $\qquad \varphi : \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f}, \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{f}$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \models \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{f}$)

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f}$)

Содержательное пояснение

$\mathtt{A}$: высказывание “Я прогуливаю лекции”

$\mathtt{B}$: высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

$\mathcal{I}$: мир, в котором я живу

- $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{f}$: я прилежно хожу на лекции
- $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{f}$: из этого не выйдет ничего хорошего

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал “Если я прогуливаю лекции, то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

Семантика

Пример

$\mathsf{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots\}$ $\varphi : \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{t}$, $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$)

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{t}$ *и* $\mathcal{I}(\neg\mathtt{B}) = \mathbf{f}$)

Содержательное пояснение

$\mathtt{A}$: высказывание “Я прогуливаю лекции”

$\mathtt{B}$: высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

$\mathcal{I}$: мир, в котором я живу

- $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbf{t}$: я прогуливаю лекции
- $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbf{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал “Если я прогуливаю лекции, то из этого не выйдет ничего хорошего”, **неправ**

Выполнимость и общезначимость

Основные свойства формул, исследуемые в рамках логики высказываний:

- Формула φ выполнима ($\|\models \varphi$[1]), если существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \models \varphi$
- Формула φ невыполнима ($\|\not\models \varphi$), если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- Формула φ общезначима ($\models \varphi$), если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Встречались ли вам эти свойства формул раньше?

Логика высказываний	*Булева алгебра*
φ выполнима	φ выполнима
φ невыполнима	$\varphi \equiv 0$
φ общезначима	$\varphi \equiv 1$

[1] Это необщеупотребимое обозначение, его придумал я

Выполнимость и общезначимость

Выполнимость, невыполнимость и общезначимость - это “почти одно и то же”:

$$
\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi \text{ выполнима} \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{l}\varphi = \psi \\ \text{выдать противоположный ответ}\end{array}"] \\
\text{формула } \psi \text{ невыполнима} \arrow[d, bend left, "\chi = \neg\psi"] \\
\text{формула } \chi \text{ общезначима} \arrow[u, bend left, "\psi = \neg\chi"]
\end{tikzcd}
$$

Проверка каждого из этих свойств может быть легко **сведена** к проверке каждого другого свойства

Метод семантических таблиц

$$
\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi \text{ выполнима} \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{l}\varphi = \psi \\ \text{выдать противоположный ответ}\end{array}"] \\
\text{формула } \psi \text{ невыполнима} \arrow[d, bend left, "\chi = \neg\psi"] \\
\text{формула } \chi \text{ общезначима} \arrow[u, bend left, "\psi = \neg\chi"]
\end{tikzcd}
$$

Далее рассматриваем задачу

проверки общезначимости (булевых) формул

Метод семантических таблиц

Чтобы проверить общезначимость формулы **методами булевой алгебры**, достаточно вычислить столбец значений реализуемой функции и проверить, содержит ли он хотя бы один 0

В терминах логики это перебор всех интерпретаций и вычисление значения φ в каждой из них

Метод семантических таблиц выполняет такой перебор, по возможности сокращая его:

- предположим, что формула φ необщезначима, и попробуем построить интерпретацию $\mathcal{I}$, такую что $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- на каждом шаге алгоритма имеем формулы, предполагаемые истинными и ложными в $\mathcal{I}$, и из готовых предположений получаем новые с "более простыми" формулами
- если **все** предположения привели к противоречивым требованиям к $\mathcal{I}$, то формула признаётся общезначимой

Метод семантических таблиц

Семантическая таблица (логики высказываний) — это пара множеств формул: $T = \langle\, \Gamma \mid \Delta \,\rangle$

Таблица T выполнима, если существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что для любой формулы $\varphi \in \Gamma$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$, а для любой формулы $\psi \in \Delta$ верно $\mathcal{I} \not\models \psi$

закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

атомарна, если все формулы из Γ и Δ атомарны

Содержательное пояснение:

Таблица T — это предположение о том, что формулы из Γ истинны, а формулы из Δ ложны

Выполнимая таблица — это предположение, верное хотя бы в одной интерпретации

Закрытая таблица — это очевидно неверное предположение

Атомарная незакрытая таблица — это явное описание интерпретаций $\mathcal{I}$, в которых предположение верно

Метод семантических таблиц

Для краткости будем опускать фигурные скобки в записи множеств семантической таблицы

Утверждение

$\models \varphi \Leftrightarrow$ **семантическая таблица** $\langle\ \emptyset \mid \varphi\ \rangle$ **невыполнима**

Утверждение

Любая закрытая таблица невыполнима

Утверждение

Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство.

Самостоятельно (это очень просто)

Метод семантических таблиц

Чтобы уметь доказывать общезначимость формул, достаточно разработать правила преобразования таблиц, позволяющие свести неявное противоречие (невыполнимую таблицу) к явному противоречию (набору закрытых таблиц), и для каждой конкретной формулы последовательно применять эти правила

Доказательства такого вида называются логическим выводом

Вывод, в котором участвуют семантические таблицы, принято называть табличным, а правила преобразования семантических таблиц — правилами табличного вывода

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода имеют следующий вид:

$$(*):\ \frac{T_0}{T_1}, \qquad (**):\ \frac{T_0}{T_1,\ T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Правила прочитываются так:

$(*)$: **таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1**

$(**)$: **таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима хотя бы одна из таблиц T_1, T_2**

Таблицы T_1, T_2 в $(**)$ — это альтернативы

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\& \quad \frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi,\ \psi \mid \Delta \,\rangle} \qquad R\& \quad \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\&\, \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle, \langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \psi \,\rangle}$$

$$L\vee \quad \frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \vee \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta \,\rangle, \langle\, \Gamma,\ \psi \mid \Delta \,\rangle} \qquad R\vee \quad \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \vee \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi,\ \psi \,\rangle}$$

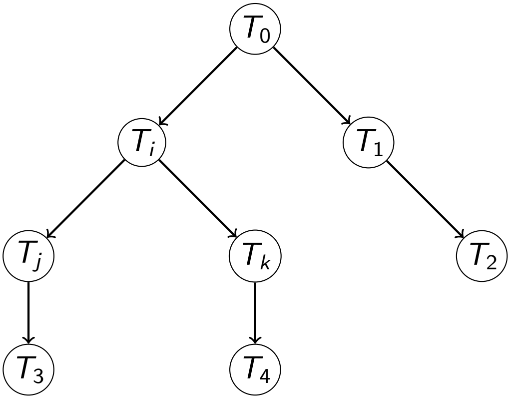
$$L\!\rightarrow \quad \frac{\langle\, \Gamma,\ \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \psi \mid \Delta \,\rangle, \langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle} \qquad R\!\rightarrow \quad \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \rightarrow \psi \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta,\ \psi \,\rangle}$$

$$L\neg \quad \frac{\langle\, \Gamma,\ \neg\varphi \mid \Delta \,\rangle}{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\rangle} \qquad R\neg \quad \frac{\langle\, \Gamma \mid \Delta,\ \neg\varphi \,\rangle}{\langle\, \Gamma,\ \varphi \mid \Delta \,\rangle}$$

Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

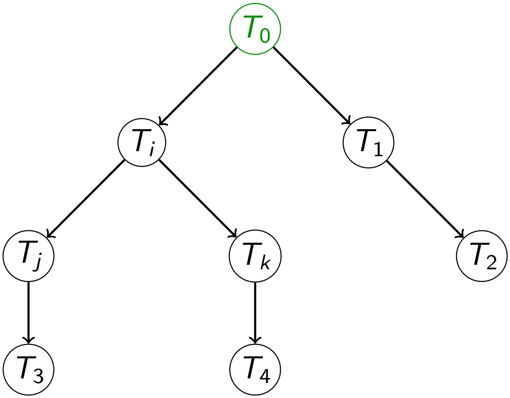
1. его вершинам приписаны семантические таблицы



Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

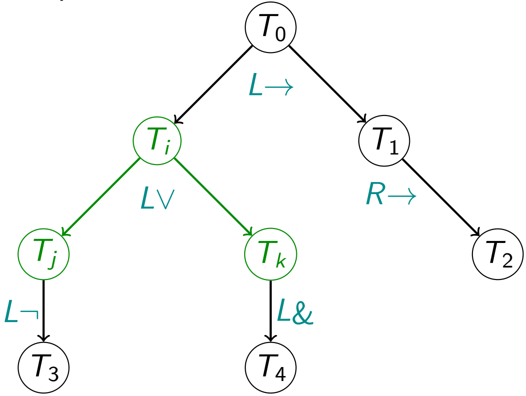
2. его корню приписана таблица T_0



Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

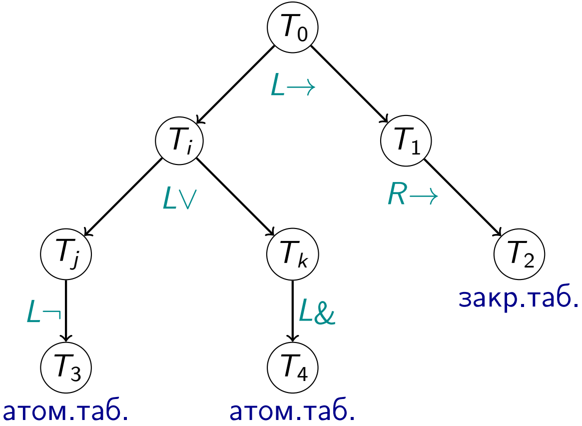
3. из T_i исходят дуги в T_j (и T_k) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{T_i}{T_j, (T_k)}$ — правило табличного вывода



Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

4. метки его листьев — закрытые или атомарные таблицы



Метод семантических таблиц

Табличный вывод успешен, если он конечен и **все** его листья помечены закрытыми таблицами

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица, для которой он построен, невыполнима

Если он построен для таблицы $\langle\, \emptyset \mid \varphi \,\rangle$, то $\models \varphi$

Утверждение

Любой табличный вывод в логике высказываний конечен

Доказательство.

Глубина вывода для таблицы $\langle\, \Gamma \mid \Delta \,\rangle$ не превосходит $N + 1$, где N — суммарное число связок в формулах из Γ, Δ ▼

Метод семантических таблиц

Примеры табличного вывода

$$\begin{array}{c}
\langle \;\; \mid \mathtt{A} \to \mathtt{A} \vee \mathtt{B} \rangle \\
\big\downarrow R{\to} \\
\langle \mathtt{A} \mid \mathtt{A} \vee \mathtt{B} \rangle \\
\big\downarrow R{\vee} \\
\langle \mathtt{A} \mid \mathtt{A},\ \mathtt{B} \rangle
\end{array}$$

закрытая таблица

Вывод успешен: $\models \mathtt{A} \to \mathtt{A} \vee \mathtt{B}$

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \;\; \mid \mathtt{A} \vee \mathtt{B} \to \mathtt{A} \rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
 & \langle \mathtt{A} \vee \mathtt{B} \mid \mathtt{A} \rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "L\vee"] & \\
\langle \mathtt{A} \mid \mathtt{A} \rangle & & \langle \mathtt{B} \mid \mathtt{A} \rangle
\end{tikzcd}$$

незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен: $\not\models \mathtt{A} \vee \mathtt{B} \to \mathtt{A}$

Метод семантических таблиц

Лемма корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода
$L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\to$, $R\to$, $L\neg$, $R\neg$

$$\frac{T_0}{T_1,\ (T_2)},$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство.

Подробно остановимся только на правиле $L\to$:

$$\frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi \to \psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \psi \mid \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle}$$

Пусть верхняя таблица выполнима: существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \models \chi'$ для $\chi' \in \Gamma$, $\mathcal{I} \not\models \chi''$ для $\chi'' \in \Delta$, и $\mathcal{I} \models \varphi \to \psi$
Тогда верно хотя бы одно из двух: $\mathcal{I} \not\models \varphi$, $\mathcal{I} \models \psi$ — а значит, хотя бы одна из нижних таблиц выполнима
Рассуждения в обратную сторону аналогичны ▼

Метод семантических таблиц

Теорема о табличном выводе в логике высказываний

Пусть D — табличный вывод для семантической таблицы T. Тогда T невыполнима в том и только в том случае, если D успешен

Доказательство.

Следует из леммы корректности правил табличного вывода, конечности табличного вывода и невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие

$\models \varphi \Leftrightarrow$ **для таблицы $\langle\ \emptyset \mid \varphi\ \rangle$ существует успешный табличный вывод**

Следствие

$\models \varphi \Leftrightarrow$ **все выводы для таблицы $\langle\ \emptyset \mid \varphi\ \rangle$ успешны**