

Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:

valdus@yandex.ru

2017, весенний семестр

Лекция 2

Логика высказываний:
синтаксис, семантика,
выполнимость, общезначимость

Метод семантических таблиц

SAT

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- ▶ истинности “простых” высказываний и
- ▶ “примитивных” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- ▶ истинности “простых” высказываний и
- ▶ “примитивных” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,
то ничего хорошего из этого не выйдет

A

Можно ли сказать, что это “простое высказывание”?

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- ▶ истинности “простых” высказываний и
- ▶ “примитивных” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет



Здесь есть причинно-следственная связь ...

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- ▶ истинности “простых” высказываний и
- ▶ “примитивных” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$A \rightarrow B$

... между двумя простыми высказываниями

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- ▶ истинности “простых” высказываний и
- ▶ “примитивных” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$A \rightarrow \neg B$$

A одно из высказываний можно сделать ещё проще

Логика высказываний: вступление

Что такое логика высказываний?

В логике высказываний на основе

- ▶ истинности “простых” высказываний и
- ▶ “примитивных” причинно-следственных связей

анализируется истинность более “сложных” высказываний

Например, можно рассмотреть такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$A \rightarrow \neg B$$

Логика высказываний: вступление

Что получилось после формализации высказывания?

Что-то очень похожее на **формулу булевой алгебры**, но не совсем:

Какой смысл имеет построенное высказывание?

Булева алгебра:

значение формулы — это булева функция

Логика высказываний: ?

A	B	$A \rightarrow \neg B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логика высказываний: вступление

Для языка логики высказываний будут описаны

- алфавит:** символы, используемые в языке
- синтаксис:** правила, по которым из символов строятся высказывания языка (**формулы**)
- семантика:** значение этих высказываний

Затем будут

- ▶ строго сформулированы интересующие нас свойства формул (**выполнимость, невыполнимость, общезначимость**)
- ▶ описаны **логические** средства проверки этих свойств (**метод семантических таблиц**)
- ▶ показаны примеры сведения решения практических задач к проверке сформулированных свойств
- ▶ показаны методы проверки этих свойств, используемые на практике (**DPLL**)

Алфавит, синтаксис

Алфавит

Пропозициональные переменные	Var
Логические связки	$\&, \vee, \rightarrow, \neg$
Скобки	(,)

Синтаксис^{1,2}

Что такое формула: (это индуктивное определение)

- ▶ x — атомарная формула, или атом ($x \in \text{Var}$)
- ▶ Составные формулы: (φ, ψ — формулы)
 $(\varphi \& \psi)$ $(\varphi \vee \psi)$ $(\varphi \rightarrow \psi)$ $(\neg \varphi)$
- ▶ других формул нет

(этот пункт индуктивного определения будет опускаться)

Приоритет связок: \neg , потом $\&$, потом \vee , потом \rightarrow

Скобки можно опускать согласно приоритету

¹ *συνταξισ* (древнегреческий) — составление, построение, порядок

² Ожегов. Толковый словарь: Раздел грамматики — наука о законах соединения слов и о строении предложений

Семантика

Семантика¹ — это значение, смысл

Как определить значение формулы?

- ▶ Значения атомов задаются интерпретацией

$$\mathcal{I} : \text{Var} \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$$

($\mathbf{t} = \text{true}$, $\mathbf{f} = \text{false}$)

- ▶ Значение $\mathcal{I}(\varphi)$ составной формулы φ в интерпретации \mathcal{I} определяется так:

$$\mathcal{I}(\varphi \& \psi) = \mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \text{ и } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t}$$

$$\mathcal{I}(\varphi \vee \psi) = \mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t}$$

$$\mathcal{I}(\varphi \rightarrow \psi) = \mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbf{t}$$

$$\mathcal{I}(\neg\varphi) = \mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f}$$

В логике принято использовать немного другие обозначения:

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{t}$$

$$\mathcal{I} \not\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbf{f}$$

¹ Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Семантика

Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\} \quad \varphi : A \rightarrow \neg B \quad \mathcal{I}(A) = \mathbf{f}, \mathcal{I}(B) = \mathbf{t}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \not\models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \mathbf{t})$$

$$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \mathbf{f})$$

Содержательное пояснение

A: высказывание “Я прогуливаю лекции”

B: высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

\mathcal{I} : мир, в котором я живу

▶ $\mathcal{I}(A) = \mathbf{f}$: я прилежно хожу на лекции

▶ $\mathcal{I}(B) = \mathbf{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B$: тот, кто сказал “Если я прогуливаю лекции, то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

Семантика

Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\} \quad \varphi : A \rightarrow \neg B \quad \mathcal{I}(A) = \mathbf{f}, \mathcal{I}(B) = \mathbf{f}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \mathbf{f})$$

$$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \mathbf{f})$$

Содержательное пояснение

A: высказывание “Я прогуливаю лекции”

B: высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

\mathcal{I} : мир, в котором я живу

▶ $\mathcal{I}(A) = \mathbf{f}$: я прилежно хожу на лекции

▶ $\mathcal{I}(B) = \mathbf{f}$: из этого не выйдет ничего хорошего

$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B$: тот, кто сказал “Если я прогуливаю лекции, то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

Семантика

Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\} \quad \varphi : A \rightarrow \neg B \quad \mathcal{I}(A) = \mathbf{t}, \mathcal{I}(B) = \mathbf{t}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \not\models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \mathbf{t})$$

$$\mathcal{I} \not\models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \mathbf{t} \text{ и } \mathcal{I}(\neg B) = \mathbf{f})$$

Содержательное пояснение

A: высказывание “Я прогуливаю лекции”

B: высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

\mathcal{I} : мир, в котором я живу

▶ $\mathcal{I}(A) = \mathbf{t}$: я прогуливаю лекции

▶ $\mathcal{I}(B) = \mathbf{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \not\models A \rightarrow \neg B$: тот, кто сказал “Если я прогуливаю лекции, то из этого не выйдет ничего хорошего”, **неправ**

Выполнимость и общезначимость

Какие же свойства формул исследуются в логике высказываний?

- ▶ Формула φ **выполнима** ($\models \varphi^1$), если существует интерпретация \mathcal{I} , такая что $\mathcal{I} \models \varphi$
- ▶ Формула φ **невыполнима** ($\not\models \varphi$), если для любой интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- ▶ Формула φ **общезначима** ($\vDash \varphi$), если для любой интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Встречались ли вам эти свойства формул раньше?

Логика высказываний

Булева алгебра

φ выполнима

φ выполнима

φ невыполнима

$\varphi \equiv 0$

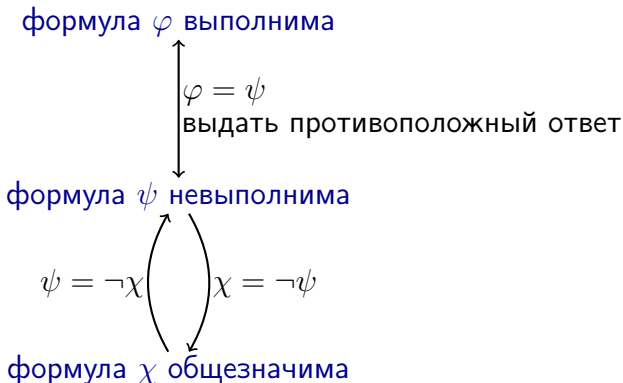
φ общезначима

$\varphi \equiv 1$

¹ Это необщепотребимое обозначение, его придумал я

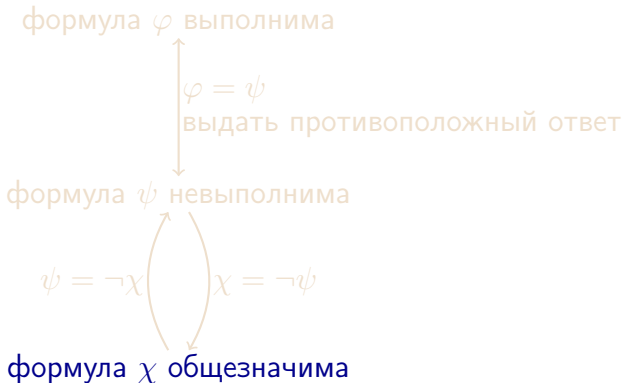
Выполнимость и общезначимость

Как связаны между собой выполнимость, общезначимость и невыполнимость?



Проверка каждого из этих свойств может быть легко сведена к проверке каждого другого свойства

Метод семантических таблиц



Далее рассматриваем задачу

проверки общезначимости (булевых) формул

Метод семантических таблиц

Как проверить общезначимость формулы φ ?

Булева алгебра: вычислить столбец значений реализуемой функции и проверить, содержит ли он хотя бы один 0

В терминах логики это **перебор всех интерпретаций** и вычисление значения φ в каждой из них

Можно ли сократить этот перебор?

Да, и это основное назначение **метода семантических таблиц:**

- ▶ предположим, что формула φ необщезначима, и попробуем построить интерпретацию \mathcal{I} , такую что $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- ▶ на каждом шаге построения имеем формулы, предполагаемые истинными и ложными в \mathcal{I} , и из готовых предположений получаем новые с “более простыми” формулами
- ▶ если все предположения привели к противоречивым требованиям к \mathcal{I} , то формула признаётся общезначимой

Метод семантических таблиц

Семантическая таблица (логики высказываний) — это пара множеств формул: $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$

Таблица T **выполнима**, если существует интерпретация \mathcal{I} , такая что для любой формулы $\varphi \in \Gamma$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$, а для любой формулы $\psi \in \Delta$ верно $\mathcal{I} \not\models \psi$

закрита, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

атомарна, если все формулы из Γ и Δ атомарны

Содержательное пояснение:

Таблица T — это предположение о том, что формулы из Γ истинны, а формулы из Δ ложны

Выполнимая таблица — это предположение, верное хотя бы в одной интерпретации

Закрытая таблица — это очевидно неверное предположение

Атомарная незакрытая таблица — это явное описание интерпретаций \mathcal{I} , в которых предположение верно

Метод семантических таблиц

Для краткости будем опускать фигурные скобки в записи множеств семантической таблицы

Утверждение

$\models \varphi \Leftrightarrow$ семантическая таблица $\langle \emptyset \mid \varphi \rangle$ невыполнима

Утверждение

Любая закрытая таблица невыполнима

Утверждение

Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство.

Самостоятельно (это очень просто)

Метод семантических таблиц

Чтобы доказать общезначимость φ , достаточно разработать правила преобразования таблиц, позволяющие свести **неявное противоречие** (невыполнимую таблицу) к **явному противоречию** (набору закрытых таблиц)

Доказательства такого вида называются **логическим выводом**

Вывод, в котором участвуют семантические таблицы, принято называть **табличным**, а правила преобразования семантических таблиц — **правилами табличного вывода**

Как же выглядят эти правила?

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода имеют следующий вид:

$$(*) : \frac{T_0}{T_1}, \quad (**): \frac{T_0}{T_1, T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Правила прочитываются так:

(*) : таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1

(**) : таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима хотя бы одна из таблиц T_1, T_2

Таблицы T_1, T_2 в (**) — это **альтернативы**

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\& \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\& \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\vee \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\rightarrow \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

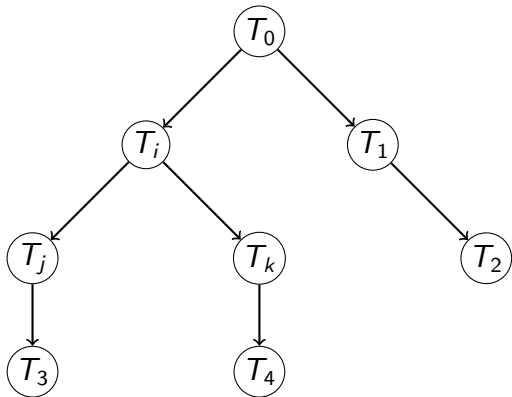
$$L\neg \frac{\langle \Gamma, \neg \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg \varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

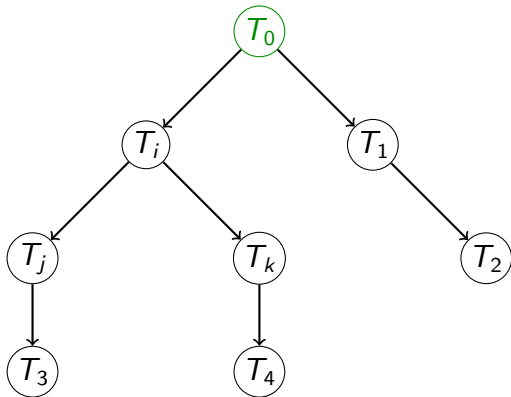
- его вершинам приписаны семантические таблицы



Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

- его корню приписана таблица T_0

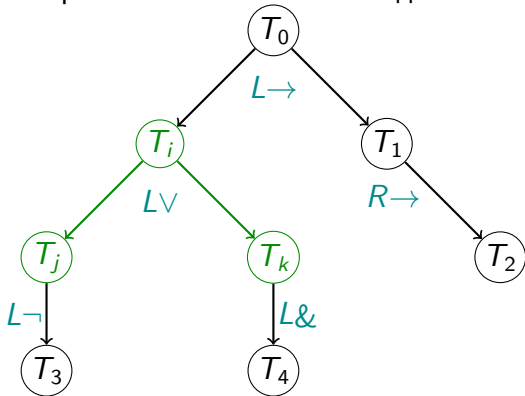


Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

3. из T_i исходят дуги в T_j (и T_k) \Leftrightarrow

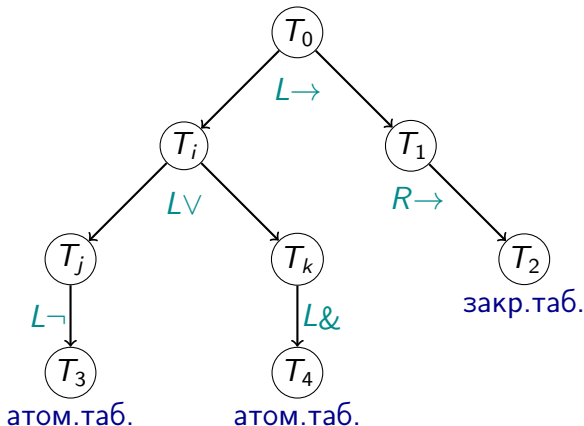
$\frac{T_i}{T_j, (T_k)}$ — правило табличного вывода



Метод семантических таблиц

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, такое что:

- метки его листьев — закрытые или атомарные таблицы



Метод семантических таблиц

Табличный вывод **успешен**, если он **конечен** и все его листья помечены **закрытыми таблицами**

Зачем нужен успешный табличный вывод?

Он показывает, что таблица, для которой он построен, невыполнима

Если он построен для таблицы $\langle \emptyset \mid \varphi \rangle$, то $\models \varphi$

Утверждение

Любой табличный вывод в логике высказываний конечен

Доказательство.

Глубина вывода для таблицы $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ не превосходит $N + 1$, где N — суммарное число связок в формулах из Γ, Δ ▼

Метод семантических таблиц

Примеры табличного вывода

$$\langle \mid A \rightarrow A \vee B \rangle$$
$$\downarrow R \rightarrow$$
$$\langle A \mid A \vee B \rangle$$
$$\downarrow R \&$$
$$\langle A \mid A, B \rangle$$

закрытая таблица

Вывод успешен: $\models A \rightarrow A \vee B$

$$\langle \mid A \vee B \rightarrow A \rangle$$
$$\downarrow R \rightarrow$$
$$\langle A \vee B \mid A \rangle$$
$$L \vee$$
$$\langle A \mid A \rangle$$
$$\langle B \mid A \rangle$$

незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен: $\not\models A \vee B \rightarrow A$

Метод семантических таблиц

Лемма корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg$

$$\frac{T_0}{T_1, (T_2)},$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство.

Подробно остановимся только на правиле $L\rightarrow$:

$$\frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

Пусть верхняя таблица выполнима: существует интерпретация \mathcal{I} , такая что $\mathcal{I} \models \chi'$ для $\chi' \in \Gamma$, $\mathcal{I} \not\models \chi''$ для $\chi'' \in \Delta$, и $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$

Тогда верно хотя бы одно из двух: $\mathcal{I} \not\models \varphi$, $\mathcal{I} \models \psi$ — а значит, хотя бы одна из нижних таблиц выполнима

Рассуждения в обратную сторону аналогичны



Метод семантических таблиц

Теорема о табличном выводе в логике высказываний

Пусть D — табличный вывод для семантической таблицы T . Тогда T невыполнима в том и только в том случае, если D успешен

Доказательство.

Следует из леммы корректности правил табличного вывода, конечности табличного вывода и невыполнимости закрытых таблиц

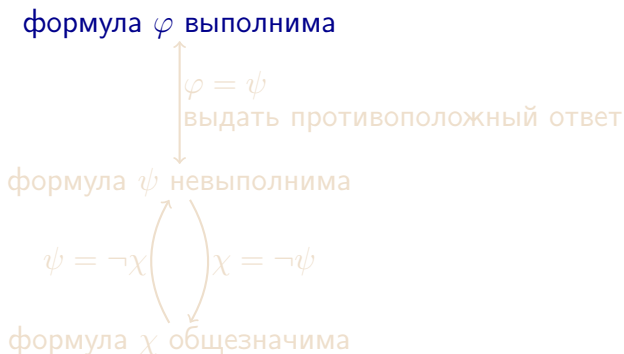
Следствие

$\models \varphi \Leftrightarrow$ для таблицы $\langle \emptyset \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод

Следствие

$\models \varphi \Leftrightarrow$ все выводы для таблицы $\langle \emptyset \mid \varphi \rangle$ успешны

SAT



Теперь рассматриваем задачу

проверки выполнимости (булевых) формул

SATisfiability

(для экономии места будем опускать “&”, а вместо $\neg x$ писать \bar{x})
(и еще будем писать 0/1 вместо **true/false** для значений переменных)

SAT: приложения

Зачем столько внимания задаче SAT?

Что “практически” полезного можно решить с её помощью?

Приведём несколько примеров и областей и показать, как задачи из этих областей сводятся к SAT

Но сначала несколько обозначений:

- ▶ если \tilde{x}^n — в точности все переменные формулы φ , то $\mathcal{I}_\varphi : \tilde{x}^n \rightarrow \{0, 1\}$ — интерпретация, в которой выполняется формула φ :

$$\mathcal{I}_\varphi \models \varphi$$

- ▶ $\exists x \varphi$ — это формула $\varphi_0 \vee \varphi_1$, где φ_i получается из φ подстановкой значения i на место переменной x
- ▶ $\varphi \leftrightarrow \psi$ — это сокращение для формулы $\varphi \rightarrow \psi \ \& \ \psi \rightarrow \varphi$

SAT: приложения

Пример

Женя, Аня, Катя и Петя решили собраться вечером и поучить логику за чашкой кофе

Неожиданно выяснилось, что

- ▶ Женя по будням много работает, а по выходным отсыпается, так что может встречаться только по **понедельникам, средам и четвергам**
- ▶ у Ани по **пятницам** спецсеминар
- ▶ Катя по **средам** вечером занимается плаванием
- ▶ а Петя по **вторникам** ходит на бокс, а каждый **четверг** пьёт пиво со школьными друзьями

Когда же им собираться?

$$\varphi : (\text{Mon} \vee \text{Wed} \vee \text{Thu}) \overline{\text{Fri}} \overline{\text{Wed}} (\overline{\text{Tue}} \overline{\text{Thu}})$$

Формула φ **выполнима**, и единственная интерпретация \mathcal{I}_φ :

$$\mathcal{I}_\varphi(\text{Mon}) = 1, \mathcal{I}_\varphi(\text{Tue}) = \dots = \mathcal{I}_\varphi(\text{Sun}) = 0$$

Значит, из всей недели **только понедельник** подходит для логики

SAT: приложения

Пример: проверка достижимости вершины в графе

$$i \longrightarrow v \longrightarrow f$$

Достижима ли вершина f из i ?

Закодируем вершины:

$$i \sim 00, \quad v \sim 01, \quad f \sim 10$$

Перепишем задачу как набор формул:

- ▶ вершины i и f : $I(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2$, $F(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2$
- ▶ описание дуг графа:

$$R(x_1, x_2, x_1', x_2') = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \overline{x_1'} x_2' \vee \bar{x}_1 x_2 x_1' \overline{x_2'}$$

$$\varphi : I(x_1^0, x_2^0) \& R(x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1) \& R(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) \\ \& (F(x_1^0, x_2^0) \vee F(x_1^1, x_2^1) \vee F(x_1^2, x_2^2))$$

$\models \varphi \Leftrightarrow f$ достижима из i в данном графе, а интерпретацией \mathcal{I}_φ описывается путь из i в f

SAT: приложения

Пример: *Bounded Model Checking* (коротко и “на пальцах”)

Рассмотрим программу π (или несколько взаимодействующих программ), работающую над конечными данными, принимающими значения из области D

Можно ли с помощью SAT убедиться, что заданные “плохие” состояния данных никогда не будут получены программой при недолгой (в пределах k шагов) работе?

Добавим к данным значение счётчика команд: $D' = D \times PC$

Объявим элементы D' вершинами графа и соединим так, как данные преобразуются выполнением инструкций программы

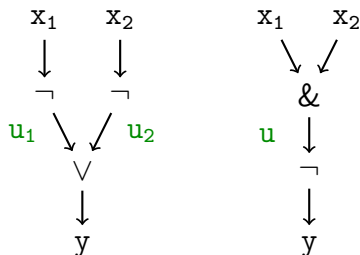
Начальное и “плохие” состояния данных — это вершины графа

Плохие состояния данных могут быть получены \Leftrightarrow хотя бы одна плохая вершина достижима из начальной в графе

SAT: приложения

Пример: проектирование схем (проверка эквивалентности)

Рассмотрим две схемы из функциональных элементов:



Как проверить, реализуют ли эти схемы одну и ту же функцию?

Например, так:

$$\begin{aligned} & \exists u_1 \exists u_2 ((y \leftrightarrow u_1 \vee u_2) \& (x_1 \leftrightarrow \neg u_1) \& (x_2 \leftrightarrow \neg u_2)) \oplus \\ & \exists u ((y \leftrightarrow \neg u) \& (u \leftrightarrow x_1 \& x_2)) \\ & \stackrel{?}{\equiv} 0 \end{aligned}$$

SAT: теория и практика решения

Насколько эффективно можно решать задачу SAT?

Есть два взгляда на этот вопрос:

- ▶ Теоретический
 - ▶ Каковы наилучшие оценки сложности решающего алгоритма?
 - ▶ Где находится задача в иерархии классов сложности?
- ▶ Практический
 - ▶ Можно ли написать программу, которая будет решать задачу за разумное время?

SAT — яркий пример задачи, для которой возможности эффективного решения сильно различаются с теоретической и практической точек зрения

SAT: теория и практика решения

Теоретический взгляд

Теорема Кука

SAT — NP-полная задача

Насколько это плохо для практического решения?

- ▶ Задачу SAT можно решить¹
- ▶ Время работы решающего алгоритма неразумно велико²

Небольшая оговорка

Когда говорят о задаче SAT, часто имеют в виду проверку выполнимости формул, представленных в **конъюнктивной нормальной форме** (КНФ)

Такое допущение не ограничивает общности задачи: можно *быстро* привести произвольную формулу к КНФ

¹ за полиномиальное время на недетерминированной машине Тьюринга

² если $P \neq NP$, то время работы неполиномиально; но если **вдруг** окажется, что $P = NP$, то её могут научиться решать быстро

SAT: теория и практика решения

Практический взгляд

Два основных “класса” **эффективных** решающих алгоритмов:

DPLL¹, **локальный поиск**

Десятки программных средств

(**SAT-решателей**, или **SAT-солверов**):

MiniSAT, zChaff, RSat, Lingeling, WinSAT,

Решение для **миллионов** переменных и множителей в формулах, возникающих на практике

Конференции, соревнования, использование в индустрии и науке

И при этом

никто не понимает, почему оно работает

¹ Davis–Putnam–Logemann–Loveland

SAT: локальный поиск

Схема работы алгоритмов локального поиска:

1. **выбрать** начальный набор значений переменных
 2. если на полученном наборе КНФ истинна, то завершить работу
 3. иначе **выбрать** переменную, изменить её значение и перейти к (2)
 4. по необходимости **выбрать** новый набор значений переменных или досрочно завершить работу
- ▶ **Выбор** осуществляется с привлечением случайности
 - ▶ цель “блужданий” по наборам — получить как можно больше истинных множителей
 - ▶ если КНФ невыполнима или подходящий выполняющий набор не найден, то ответ не определён

SAT: DPLL

Схема работы DPLL-алгоритмов для КНФ C :

DPLL(cnf C):

```
if( $C == \text{"true"}$ ) return true
if( $C == \text{"false"}$ ) return false
pick  $X$ :  $X$  is variable of  $C$ 
pick  $b$ :  $b = 0$  or  $b = 1$ 
if(DPLL( $C\{X=b\}$ )) return true
return DPLL( $C\{X=!b\}$ )
```

Дополнительные оптимизации:

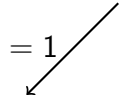
- ▶ **свёртка констант**: если в множителе КНФ осталось одно слагаемое X (или \bar{X}), то немедленно подставить значение $X = 1$ (или $X = 0$)
- ▶ **деполяризация**: если переменная X входит в C только без отрицания (или только с отрицанием), то немедленно подставить значение $X = 1$ (или $X = 0$)

SAT: DPLL

Пример

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

$$x_2 = 1$$


$$(x_1 \vee x_3) \overline{x_1} \overline{x_3}$$

Пояснения:

Выбираем переменную x_2 и значение 1

SAT: DPLL

Пример

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

$$x_2 = 1$$

$$(x_1 \vee x_3) \overline{x_1} \overline{x_3}$$

$$x_1 = x_3 = 0$$

false

Пояснения:

Свёртка констант для x_1, x_3

SAT: DPLL

Пример

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

$$x_2 = 1$$

$$(x_1 \vee x_3) \overline{x_1} \overline{x_3}$$

$$x_1 = x_3 = 0$$

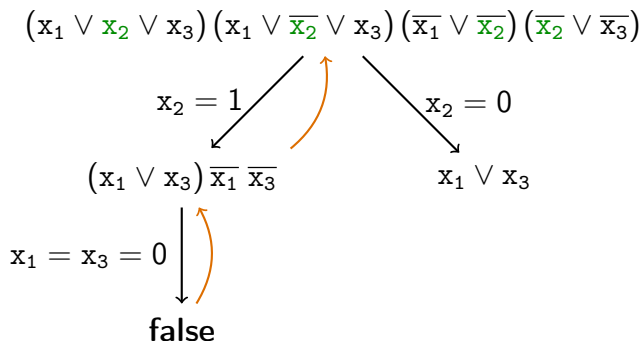
false

Пояснения:

Появился ложный множитель: откат

SAT: DPLL

Пример

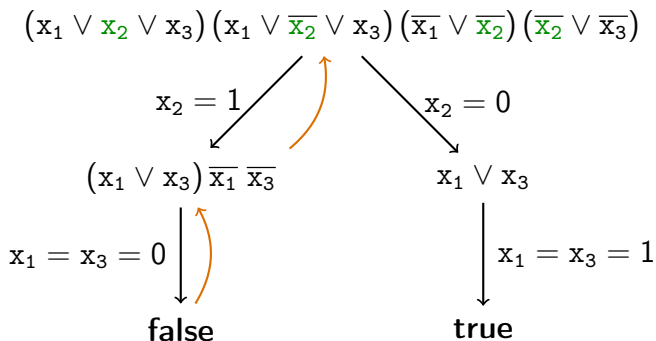


Пояснения:

Переходим к оставшемуся значению 0 для x_2

SAT: DPLL

Пример

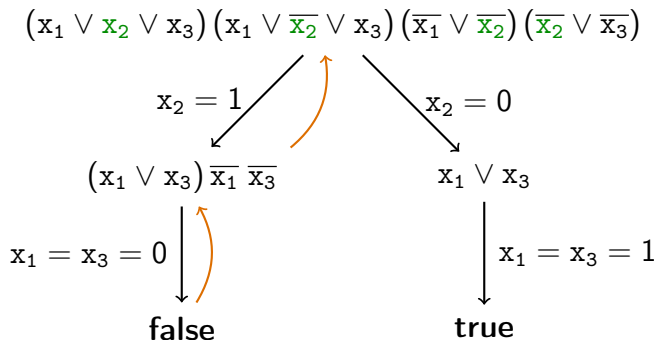


Пояснения:

Деполяризация для x_1 и x_3

SAT: DPLL

Пример



Пояснения:

СТОП: формула выполнима

Конец лекции 2