Математическая логика и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2015, весенний семестр

Лекция 2

Классическая логика предикатов первого порядка

Синтаксис: термы и формулы

Семантика: интерпретации

выполнимость

Немного о названии

I

классическая
логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии

||

логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии

III

логика
предикатов

Немного о названии

IV

логика

первого порядка

Немного о названии

классическая
логика
предикатов
первого порядка

Что хорошего в логике предикатов?

Попробуем формализовать какое-нибудь высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции, то экзамен он не сдаст

Что хорошего в логике предикатов?

Попробуем формализовать какое-нибудь высказывание:

$$\text{Если } \underbrace{\text{кто-то прогуливает лекции}}_{\mathbf{A}}\text{, то } \underbrace{\text{экзамен он не сдаст}}_{\neg\ \mathbf{B}}$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \neg \mathbf{B}$$

логика высказываний

Что хорошего в логике предикатов?

Попробуем формализовать какое-нибудь высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции, то экзамен он не сдаст

Что хорошего в логике предикатов?

Попробуем формализовать какое-нибудь высказывание:

Если $\underbrace{\text{кто-то прогуливает лекции}}_{\mathbf{Shirk}(\mathbf{x})}$, то $\underbrace{\text{экзамен он не сдаст}}_{\neg\ \mathbf{Pass}(\mathbf{x})}$

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{Shirk}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{Pass}(\mathbf{x}))$$

Что хорошего в логике предикатов?

Попробуем формализовать какое-нибудь высказывание:

Если $\underbrace{\text{кто-то прогуливает лекции}}_{\mathbf{Shirk}(\mathbf{x})}$, то $\underbrace{\text{экзамен не сдаст его сосед}}_{\neg\ \mathbf{Pass}(\qquad\qquad)}$

$$\forall \mathbf{x}\,(\mathbf{Shirk}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{Pass}(\qquad\qquad))$$

Что хорошего в логике предикатов?

Попробуем формализовать какое-нибудь высказывание:

Если $\underbrace{\text{кто-то прогуливает лекции}}_{\mathbf{Shirk}(\mathbf{x})}$, то $\underbrace{\text{экзамен не сдаст его сосед}}_{\neg\ \mathbf{Pass}(\mathbf{neighbour}(\mathbf{x}))}$

$$\forall \mathbf{x}\,(\mathbf{Shirk}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{Pass}(\mathbf{neighbour}(\mathbf{x})\,))$$

логика предикатов

Что такое предикат?

Praedicatum (лат.) — сказанное; сказуемое

Понятие, определяющее предмет суждения (субъект)[1]

Кто-то	прогуливает	лекцию
(*субъект*)	(*предикат*)	(*объект*)

В более общем смысле:

- свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

[1] Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Логика предикатов

изучает законы причинно-следственной зависимости между утверждениями, представленными в виде отношений

Для этого вводится формальный язык описания отношений между произвольными предметами

Язык логики предикатов определяется:

1. алфавитом
2. синтаксисом
3. семантикой

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные	$Var = \{x_1, x_2, \ldots\}$
Предметные константы	— это имена предметов
Функциональные символы	обозачают операции над предметами
Предикатные символы	обозначают отношения между предметами

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные $Var = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Предметные константы $Const = \{c_1, c_2, \ldots\}$

Функциональные символы $Func = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots\}$

Предикатные символы $Pred = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \ldots\}$

n_i — местность функционального символа f_i
m_i — местность предикатного символа P_i

(запись местности будет опускаться)

Тройка $\langle Const, Func, Pred \rangle$ — сигнатура алфавита

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные $Var = \{x_1, x_2, \dots\}$

Предметные константы $Const = \{c_1, c_2, \dots\}$

Функциональные символы $Func = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \dots\}$

Предикатные символы $Pred = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \dots\}$

Например,

константы: $0,\ 1,\ \pi,\ \dots$

функциональные символы: $+^{(2)},\ \cdot^{(2)},\ lim^{(3)},\ \dots$

предикатные символы: $<^{(2)},\ =^{(2)},\ \dots$

Алфавит

II. Логические связки

Конъюнкция	(логическое И)	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ)	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	$\rightarrow$

III. Кванторы

Квантор всеобщности	(“для каждого”)	$\forall$
Квантор существования	(“хотя бы один”)	$\exists$

IV. Знаки препинания

Скобки	$($ $)$
Разделитель	$,$

Синтаксис: термы

Терм — это:

x	$(x \in Vars)$
c	$(c \in Const)$
$f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$	$(f^{(n)} \in Func;\ t_1, \ldots t_n$ — термы$)$

(это индуктивное определение)

Обозначения:

$Term$ — множество всех термов в заданном алфавите

Пусть t — терм. Тогда:

Var_t — множество всех переменных, входящих в терм t

$t(x_1, \ldots, x_n)$ — иная запись для t,

если $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, входящие в t

Терм t — основной, если $Var_t = \emptyset$

Синтаксис: термы

Примеры термов:

z	$(z \in \mathit{Var})$
3	$(3 \in \mathit{Const})$
$f(3, z)$	$(f^{(2)} \in \mathit{Func})$
$\cdot(x, +(1, \mathit{exp}(3, z)))$	$(\cdot^{(2)}, +^{(2)}, \mathit{exp}^{(2)} \in \mathit{Func},$ $1 \in \mathit{Const},\ x \in \mathit{Var})$
$x \cdot (1 + 3^z)$	— инфиксная форма записи
$1 \cdot (1 + 3^1)$	— основной терм

Синтаксис: формулы

Формула — это:

$P(t_1, \dots, t_m)$ — атомарная формула $(P^{(m)} \in Pred,\ t_1, \dots, t_m \in Term)$

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi \& \psi) \\ (\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \to \psi) \\ (\neg \varphi) \\ (\forall x\ \varphi) \\ (\exists x\ \varphi) \end{array}\right\} \text{составная формула}$$

$(\varphi,\ \psi$ — формулы, $x \in Var)$

Обозначение:

$Form$ — множество всех формул в заданном алфавите

Синтаксис: формулы

$P(t_1, \ldots, t_m)$	“термы $t_1, \ldots, t_m$ находятся в отношении P”
$(\varphi \& \psi)$	“φ и ψ”
$(\varphi \vee \psi)$	“φ или ψ”
$(\varphi \to \psi)$	“если φ, то ψ”
$(\neg\varphi)$	“неверно, что φ”
$(\forall x\ \varphi)$	“для любого x верно φ”
$(\exists x\ \varphi)$	“хотя бы для одного x верно φ”

Синтаксис: формулы

Примеры формул:

$P(y, f(x, y))$ $\quad (P^{(2)} \in Pred,$

$f^{(2)} \in Func,\ x, y \in Var)$

$(\neg P(y, f(x, y)))$

$(\forall x\ \neg P(y, f(x, y)))$

$((\forall x\ \neg P(y, f(x, y))) \to R(x))$ $\quad (R^{(1)} \in Pred)$

$(\exists y\ ((\forall x\ \neg P(y, f(x, y))) \to R(x)))$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists y\ ((\forall x\ \neg P(y, f(x, y))) \to R(x)))$$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

$$\underbrace{(\exists y\ ((\forall x\ \neg P(y, f(x, y))) \to R(x)))}_{\text{Область действия квантора } \exists}$$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists y \ ((\forall x \neg P(y, f(x, y))) \to R(x)))$$

Переменная, связанная квантором $\exists$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists y\ \boxed{((\forall x\ \neg P(y, f(x, y))) \to R(x))})$$

Связанные вхождения этой переменной

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists y\ ((\forall x\ \underbrace{\neg P(y, f(x, y))}_{\text{Область действия квантора } \forall}) \to R(x)))$$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists y\ ((\forall x\ \boxed{\neg P(y, f(x, y))}) \to R(x)))$$

$$\uparrow$$

Переменная, связанная квантором $\forall$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists y\ ((\forall x\ \boxed{\neg P(y, f(x, y))}) \to R(x)))$$

Связанное вхождение этой переменной

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists y \ ((\forall x \ \neg P(y, f(x,y))) \to R(x)))$$

Свободное вхождение переменной x

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная

Например, в рассмотренной формуле

$$(\exists y\ ((\forall x\ \neg P(y, f(x, y))) \to R(x)))$$

свободной является только переменная x

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные.

Формально, множество Var_φ свободных переменных формулы φ определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\text{если } \varphi = P(t_1, \ldots, t_m), & \text{то } Var_\varphi = \bigcup\limits_{1 \le i \le m} Var_{t_i} \\
\left.\begin{array}{l}
\text{если } \varphi = (\psi_1 \& \psi_2), \\
\text{если } \varphi = (\psi_1 \vee \psi_2), \\
\text{если } \varphi = (\psi_1 \to \psi_2),
\end{array}\right\} & \text{то } Var_\varphi = Var_{\psi_1} \cup Var_{\psi_2} \\
\text{если } \varphi = (\neg\psi), & \text{то } Var_\varphi = Var_\psi \\
\left.\begin{array}{l}
\text{если } \varphi = (\forall x\ \psi), \\
\text{если } \varphi = (\exists x\ \psi),
\end{array}\right\} & \text{то } Var_\varphi = Var_\psi \setminus \{x\}
\end{array}
$$

Синтаксис: формулы

Пусть φ — формула

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — иная запись для φ,
если $x_1, \ldots, x_n$ — свободные переменные формулы φ

Если $Var_\varphi = \emptyset$, то φ — замкнутая формула

CForm — множество всех замкнутых формул в заданном алфавите

Соглашение о приоритете логических операций

Логические операции в порядке убывания приоритета располагаются так:

$$\forall, \exists, \neg$$
$$\&$$
$$\vee$$
$$\to$$

Это означает, что некоторые скобки можно опускать

Синтаксис: формулы

Следующие формулы одинаковы с точностью до опущенных скобок:

$$\forall x\ \neg P(x) \& \exists y\ R(x,y) \to \exists x(\neg P(x) \vee P(y))$$

$$(\forall x\ (\neg P(x))) \& (\exists y\ R(x,y)) \to (\exists x((\neg P(x)) \vee P(y)))$$

$$((\forall x\ (\neg P(x))) \& (\exists y\ R(x,y))) \to (\exists x((\neg P(x)) \vee P(y)))$$

$$(((\forall x\ (\neg P(x))) \& (\exists y\ R(x,y))) \to (\exists x((\neg P(x)) \vee P(y))))$$

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$lim(x, y) =$ "x — предел последовательности действительных чисел y"

в алфавите с

- константой 0
- функциональным символом $h^{(2)}$
- предикатными символами $R^{(1)}$, $N^{(1)}$, $S^{(1)}$, $E^{(3)}$, $<^{(2)}$

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$lim(x, y) =$ "x — предел последовательности действительных чисел y"

в алфавите с

$0 \in Const$

$h^{(2)} \in Func$: $\quad h(x, y) = |x - y|$

$\{R^{(1)}, N^{(1)}, S^{(1)}, E^{(3)}, <^{(2)}\} \subseteq Pred$:

$R(x) =$ "x — действительное число"

$N(x) =$ "x — натуральное число"

$S(x) =$ "x — последовательность действительных чисел"

$E(x, n, s) =$ "x — n-й член последоватлеьности s"

$< (x, y) = (x < y)$

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$lim(x, y) =$ "x — предел последовательности действительных чисел y"

Ответ:

$$R(x)\&S(y)\&\forall\varepsilon\ (R(\varepsilon)\&(0<\varepsilon)\to$$
$$\exists n\ (N(n)\&\forall m\ (N(m)\&(n<m)\to$$
$$\exists z\ (E(z,m,y)\&(h(x,z)<\varepsilon)))))$$

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$lim(x, y) =$ "x — предел последовательности действительных чисел y"

Ответ:

$$R(x) \& S(y) \& \forall \varepsilon \; (R(\varepsilon) \& (0 < \varepsilon) \to$$

$$\exists n \; (N(n) \& \forall m \; (N(m) \& (n < m) \to$$

$$\forall z \; (E(z, m, y) \to (h(x, z) < \varepsilon)))))$$

Семантика: интерпретации

Семантика[2] — значение, смысл

В логике предикатов — смысл термов (функции), предикатов (отношения), формул

Значения термов и предикатов определяются на основе алгебраических систем[3]; в терминологии логики предикатов — интерпретаций

[2] Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

[3] множество + операции и отношения над элементами этого множества

Семантика: интерпретации

Пусть $\langle Const, Func, Pred \rangle$ — сигнатура алфавита
Тогда интерпретация (этой сигнатуры) — это система $\left\langle D, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \right\rangle$, где

- D — непустое множество: область интерпретации, предметная область, универсум
- $\overline{Const} : Const \to D$ — оценка констант
  - $\overline{c} = \overline{Const}(c)$ — предмет, сопоставленный константе c
- $\overline{Func} : Func \to (\bigcup\limits_{n \geq 1} (D^n \to D))$ — оценка функциональных символов
  - $\overline{f} = \overline{Func}(f) : D^n \to D$ — функция, сопоставленная символу $f^{(n)}$
- $\overline{Pred} : Pred \to (\bigcup\limits_{n \geq 1} (D^n \to \{true, false\}))$ — оценка предикатных символов
  - $\overline{p} = \overline{Pred}(p) : D^n \to \{true, false\}$ — предикат, сопоставленный символу $p^{(n)}$

Семантика: интерпретации

Пример

Сигнатура: $Const = \{c_1, c_2\}$, $Func = \{f^{(1)}\}$, $Pred = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: $D = \{d_1, d_2, d_3\}$

оценка констант: $\overline{c}_1 = d_1$, $\overline{c}_2 = d_2$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

Семантика: интерпретации

Значение терма

Пусть $t(x_1, \ldots, x_n)$ — терм, I — интерпретация

Значение $t(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$ терма t в интерпретации I на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- терм-переменная:
  $$x_i[d_1, \ldots, d_n] = d_i$$
- терм-константа:
  $$c[d_1, \ldots, d_n] = \overline{c}$$
- иначе:

$$f(t_1, \ldots, t_k)[d_1, \ldots, d_n] = \overline{f}(t_1[d_1, \ldots, d_n], \ldots, t_k[d_1, \ldots, d_n])$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул ($\models$)

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — формула, I — интерпретация

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул ($\models$)

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, I — интерпретация

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- атомарная формула:

$$I \models P(t_1, \ldots, t_k)[d_1, \ldots, d_n]$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\overline{P}(t_1[d_1, \ldots, d_n], \ldots, t_k[d_1, \ldots, d_n]) = 1$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул ($\models$)

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, I — интерпретация

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- конъюнкция:
  $I \models (\varphi \& \psi)[d_1, \ldots, d_n]$
  $\Leftrightarrow$
  $I \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$
  И
  $I \models \psi[d_1, \ldots, d_n]$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул ($\models$)

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, I — интерпретация

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- дизъюнкция:
  $I \models (\varphi \vee \psi)[d_1, \ldots, d_n]$
  $\Leftrightarrow$
  $I \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$
  ИЛИ
  $I \models \psi[d_1, \ldots, d_n]$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул ($\models$)

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, I — интерпретация

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- отрицание:

$$I \models (\neg\varphi)[d_1, \ldots, d_n]$$
$$\Leftrightarrow$$
$$I \not\models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул ($\models$)

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, I — интерпретация

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- импликация:
  $$I \models (\varphi \to \psi)[d_1, \ldots, d_n]$$
  $\Leftrightarrow$
  $$I \not\models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$
  ИЛИ
  $$I \models \psi[d_1, \ldots, d_n]$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул ($\models$)

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, I — интерпретация

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- квантор всеобщности:
  $I \models (\forall x_0\ \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n))[d_1, \ldots, d_n]$
  $\Leftrightarrow$
  для **любого** предмета d_0 верно
  $I \models \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)[d_0, \ldots, d_n]$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул ($\models$)

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — формула, I — интерпретация

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- квантор существования:
  $I \models (\exists x_0\ \varphi(x_0, x_1, \dots, x_n))[d_1, \dots, d_n]$
  $\Leftrightarrow$
  для **некоторого** предмета d_0 верно
  $I \models \varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)[d_0, \dots, d_n]$

Семантика: выполнимость

Пример

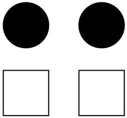
Рассмотрим такие интерпретации:

предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$C(x)$: “x — круг”
$S(x)$: “x — квадрат”
$B(x)$: “x — чёрный предмет”
$W(x)$: “x — белый предмет”
$U(x, y)$: “предмет x лежит под предметом y”

Семантика: выполнимость



Рассмотрим такую интерпретацию I:

и такую формулу:

$$\forall x(W(x)\&S(x) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))$$

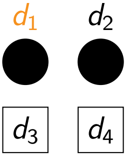
Как прочитать эту формулу?

Для каждого предмета x: если он является белым и является квадратом, то существует предмет y, который является чёрным, и является кругом, и предмет x лежит под предметом y

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Убедимся в том, что это утверждение верно
(то есть что формула выполнима в интерпретации I)

Семантика: выполнимость



Рассмотрим такую интерпретацию I:

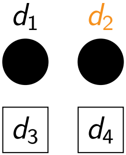
и такую формулу:

$$\forall x(W(x)\&S(x) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

1. $x \leftarrow d_1$:
   - $I \not\models W(x)[d_1]$
   - $I \not\models (W(x)\&S(x))[d_1]$
   - $I \models ((W(x)\&S(x)) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_1]$

Семантика: выполнимость



Рассмотрим такую интерпретацию I:

и такую формулу:

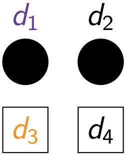
$$\forall x(W(x)\&S(x) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

2. $x \leftarrow d_2$:
   - $I \not\models W(x)[d_2]$
   - $I \not\models (W(x)\&S(x))[d_2]$
   - $I \models ((W(x)\&S(x)) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_2]$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию I:



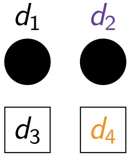
и такую формулу:

$$\forall x(W(x)\&S(x) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

3. $x \leftarrow d_3$:
    - $I \models B(y)[d_1]$
    - $I \models C(y)[d_1]$
    - $I \models U(x,y)[d_3,d_1]$
    - $I \models (B(y)\&C(y)\&U(x,y))[d_3,d_1]$
    - $I \models (\exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_3]$
    - $I \models ((W(x)\&S(x)) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_3]$

Семантика: выполнимость



Рассмотрим такую интерпретацию I:

и такую формулу:

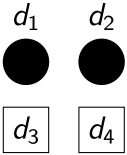
$$\forall x(W(x)\&S(x) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

3. $x \leftarrow d_4$:
   - $I \models B(y)[d_2]$
   - $I \models C(y)[d_2]$
   - $I \models U(x,y)[d_4, d_2]$
   - $I \models (B(y)\&C(y)\&U(x,y))[d_4, d_2]$
   - $I \models (\exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_4]$
   - $I \models ((W(x)\&S(x)) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_4]$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию I:



и такую формулу:

$$\forall x(W(x)\&S(x) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))$$

Итого:

$$I \models ((W(x)\&S(x)) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_1]$$
$$I \models ((W(x)\&S(x)) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_2]$$
$$I \models ((W(x)\&S(x)) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_3]$$
$$I \models ((W(x)\&S(x)) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))[d_4]$$

А значит,

$$I \models \forall x(W(x)\&S(x) \to \exists y(B(y)\&C(y)\&U(x,y)))$$

Семантика: выполнимость

Пример

Рассмотрим такую интерпретацию I:

сигнатура: $Const = \{c_1, c_2\}$, $Func = \{f^{(1)}\}$, $Pred = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$

предметная область: $D = \{d_1, d_2, d_3\}$

оценка констант: $\overline{c}_1 = d_1$, $\overline{c}_2 = d_2$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

И такую формулу:

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models R(x,y)[d_1, d_1]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models R(x,y)[d_1,d_1]$
- $I \not\models P(f(y))[d_1]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models R(x,y)[d_1,d_1]$
- $I \not\models P(f(y))[d_1]$
- $I \models (\neg P(f(y)))[d_1]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models R(x,y)[d_1,d_1]$
- $I \not\models P(f(y))[d_1]$
- $I \models (\neg P(f(y)))[d_1]$
- $I \models (R(x,y)\&\neg P(f(y)))[d_1,d_1]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models R(x,y)[d_1, d_1]$
- $I \not\models P(f(y))[d_1]$
- $I \models (\neg P(f(y)))[d_1]$
- $I \models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_1, d_1]$
- $I \models (\exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))[d_1]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	$true$
d_2	$false$
d_3	$true$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	$true$	$true$	$false$
d_2	$true$	$false$	$true$
d_3	$false$	$true$	$true$

- $I \models R(x,y)[d_1,d_1]$
- $I \not\models P(f(y))[d_1]$
- $I \models (\neg P(f(y)))[d_1]$
- $I \models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_1,d_1]$
- $I \models (\exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))[d_1]$
- $I \models (P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))[d_1]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \not\models P(x)[d_2]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	$true$
d_2	$false$
d_3	$true$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	$true$	$true$	$false$
d_2	$true$	$false$	$true$
d_3	$false$	$true$	$true$

- $I \not\models P(x)[d_2]$
- $I \models (P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))[d_2]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models P(x)[d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models P(x)[d_3]$
- $I \not\models R(x,y)[d_3, d_1]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	$true$
d_2	$false$
d_3	$true$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	$true$	$true$	$false$
d_2	$true$	$false$	$true$
d_3	$false$	$true$	$true$

- $I \models P(x)[d_3]$
- $I \not\models R(x,y)[d_3,d_1]$
- $I \not\models (R(x,y)\&\neg P(f(y)))[d_3,d_1]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models P(x)[d_3]$
- $I \not\models R(x,y)[d_3, d_1]$
- $I \not\models (R(x,y)\&\neg P(f(y)))[d_3, d_1]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_2]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models P(x)[d_3]$
- $I \not\models R(x,y)[d_3, d_1]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_1]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_2]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_2]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	$true$
d_2	$false$
d_3	$true$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	$true$	$true$	$false$
d_2	$true$	$false$	$true$
d_3	$false$	$true$	$true$

- $I \models P(x)[d_3]$
- $I \not\models R(x,y)[d_3, d_1]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_1]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_2]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_2]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	$true$
d_2	$false$
d_3	$true$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	$true$	$true$	$false$
d_2	$true$	$false$	$true$
d_3	$false$	$true$	$true$

- $I \models P(x)[d_3]$
- $I \not\models R(x,y)[d_3, d_1]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_1]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_2]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_2]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_3]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$_x{}^y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models P(x)[d_3]$
- $I \not\models R(x,y)[d_3, d_1]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_1]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_2]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_2]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_3]$
- $I \not\models (R(x,y) \& \neg P(f(y)))[d_3, d_3]$
- $I \not\models (\exists y(R(x,y) \& \neg P(f(y))))[d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	*true*
d_2	*false*
d_3	*true*

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	*true*	*true*	*false*
d_2	*true*	*false*	*true*
d_3	*false*	*true*	*true*

- $I \models P(x)[d_3]$
- $I \not\models R(x,y)[d_3,d_1]$
- $I \not\models (R(x,y)\&\neg P(f(y)))[d_3,d_1]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_2]$
- $I \not\models (R(x,y)\&\neg P(f(y)))[d_3,d_2]$
- $I \not\models (\neg P(f(y)))[d_3]$
- $I \not\models (R(x,y)\&\neg P(f(y)))[d_3,d_3]$
- $I \not\models (\exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))[d_3]$
- $I \not\models (P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))[d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

$\overline{f}(x)$

x	$\overline{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	$true$
d_2	$false$
d_3	$true$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	$true$	$true$	$false$
d_2	$true$	$false$	$true$
d_3	$false$	$true$	$true$

Итого:

- $I \models (P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))[d_1]$ (хорошо)
- $I \models (P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))[d_2]$ (хорошо)
- $I \not\models (P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))[d_3]$ (плохо)

А значит,

$$I \not\models \forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y)\&\neg P(f(y))))$$

Конец лекции 2