Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 2

Сети Петри:
происхождение,
основные понятия

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Происхождение сетей Петри

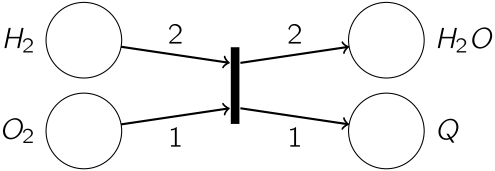
Зарождение модели сетей Петри принято относить к 1962 году: времени публикации диссертации немецкого математика Карла Адама Петри, содержащей первое их «обстоятельное» описание

При этом временем появления концепции сети Петри принято считать 1939 год, когда (тогда ещё не учёный-математик, а обычный школьник) К. Петри в личных целях придумал способ наглядной записи схем химических реакций, усовершенствованный им впоследствии до модели сети Петри

Происхождение сетей Петри

Для примера рассмотрим реакцию горения водорода:
$2H_2 + O_2 \to 2H_2O + Q$ (Q — энергия, тепло)

Эту схему реакции можно наглядно изобразить так:



Круги отвечают сущностям, используемым в реакции

Узкий прямоугольник отвечает собственно реакции

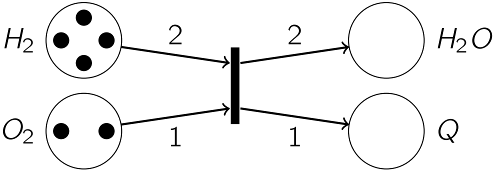
Сущности, поглощаемые при реакции, и их количество изображены стрелками, входящими в прямоугольник, и числами у них

Сущности, порождаемые при реакции, и их количество изображены стрелками, исходящими из прямоугольника, и числами у них

Происхождение сетей Петри

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O + Q$$

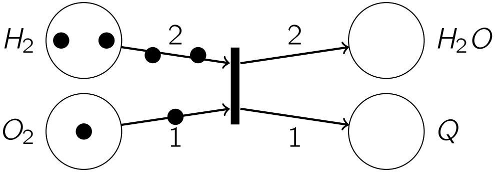
Саму реакцию можно представить себе как соответствующее перемещение фишек (токенов; tokens; ●) из одних кругов по стрелкам в другие круги



Происхождение сетей Петри

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O + Q$$

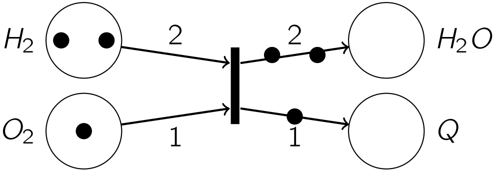
Саму реакцию можно представить себе как соответствующее перемещение фишек (токенов; tokens; ●) из одних кругов по стрелкам в другие круги



Происхождение сетей Петри

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O + Q$$

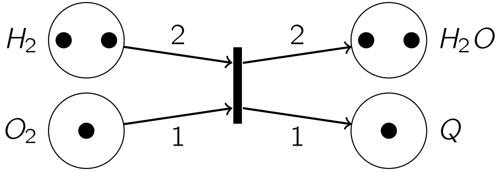
Саму реакцию можно представить себе как соответствующее перемещение фишек (токенов; tokens; ●) из одних кругов по стрелкам в другие круги



Происхождение сетей Петри

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O + Q$$

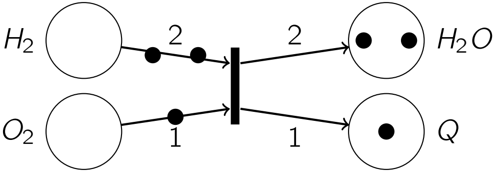
Саму реакцию можно представить себе как соответствующее перемещение фишек (токенов; tokens; ●) из одних кругов по стрелкам в другие круги



Происхождение сетей Петри

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O + Q$$

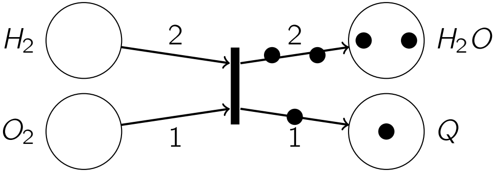
Саму реакцию можно представить себе как соответствующее перемещение фишек (токенов; tokens; ●) из одних кругов по стрелкам в другие круги



Происхождение сетей Петри

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O + Q$$

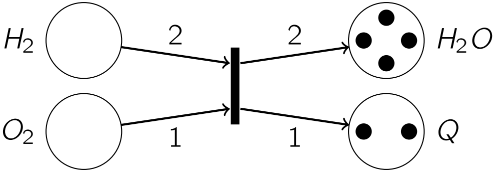
Саму реакцию можно представить себе как соответствующее перемещение фишек (токенов; tokens; ●) из одних кругов по стрелкам в другие круги



Происхождение сетей Петри

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O + Q$$

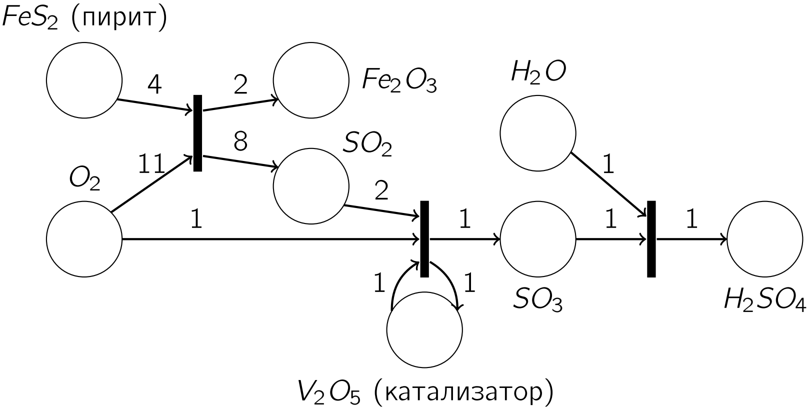
Саму реакцию можно представить себе как соответствующее перемещение фишек (токенов; tokens; ●) из одних кругов по стрелкам в другие круги



Происхождение сетей Петри

Сетями Петри можно моделировать (описывать, иллюстрировать) и более сложные химические реакции

Например, так можно изобразить схему производства серной кислоты:



Происхождение сетей Петри

После работы 1962 года достаточно быстро было обнаружено, что сети Петри пригодны для моделирования самых разнообразных систем, содержащих в себе

- автономных последовательных взаимодействующих компонентов
- параллелизм и недетерминизм в выполнении действий
- ресурсы какой-либо природы (физические, вычислительные, логические, ...), их использование, конкуренцию за них и синхронизацию относительно них

Сети Петри: синтаксис

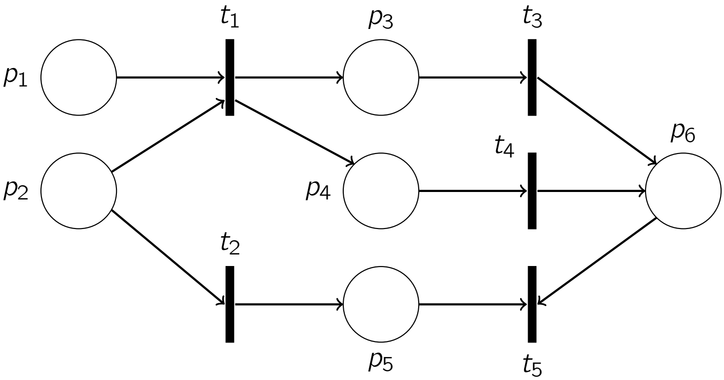
Сетью будем называть двудольный ориентированный граф $N = (P, T, E)$, где:

- P — непустое множество позиций (places)
- T — непустое множество переходов (transitions), такое что $P \cap T = \emptyset$
- Элементы множества $P \cup T$ — это вершины графа
- $E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — непустое множество дуг графа, такое что в графе нет изолированных вершины
  - то есть каждая вершина инцидентна хотя бы одной вершине
  - то есть для любой позиции p существует переход t, такой что хотя бы одна из пар (t, p), (p, t) принадлежит E

Позиции, переходы и дуги принято изображать соответственно кругами, прямоугольниками и стрелками, как ранее в примерах

Сети Петри: синтаксис

Пример сети $N = (P, T, E)$:



$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$

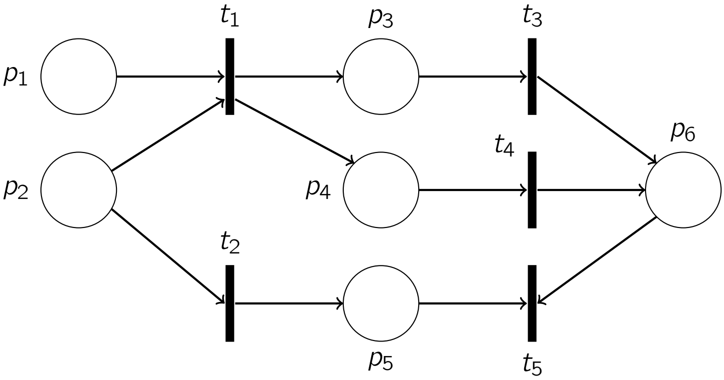
$$E = \{ \quad (p_1, t_1), (p_2, t_1), (p_2, t_2), (t_1, p_3), (t_1, p_4), (t_2, p_5),$$
$$(p_3, t_3), (p_4, t_4), (p_5, t_5), (t_3, p_6), (t_4, p_6), (p_6, t_5) \quad \}$$

Сети Петри: синтаксис

Для вершины x сети $N = (P, T, E)$ будем использовать следующие обозначения

- ${}^\bullet x = \{y \mid (y, x) \in E\}$ — множество предшественников вершины x
- $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in E\}$ — множество последователей вершины x

Например:



${}^\bullet p_6 = \{t_3, t_4\}$ $\quad p_2{}^\bullet = \{t_1, t_2\}$ $\quad {}^\bullet t_5 = \{p_5, p_6\}$ $\quad t_4{}^\bullet = \{p_6\}$ $\quad {}^\bullet p_1 = t_5{}^\bullet = \emptyset$

Мультимножества

$\mathbb{N}_0$ — так будем обозначать множество всех целых неотрицательных чисел: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

Для множества X мультимножеством с основой X называется отображение $M : X \to \mathbb{N}_0$

Содержательно, мультимножество — это неупорядоченная совокупность элементов, в которой (в отличие от «просто» множества) каждый элемент может встречаться произвольное число раз

Значение $M(x)$ для мультимножества M и элемента x называется кратностью (количеством вхождений) x в M

Если $M(x) = 0$, то элемент x не входит в мультимножество M

Если основа X мультимножества M конечна и её элементы упорядочены: $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ — то мультимножество можно отождествить с упорядоченным набором чисел $M = \langle M(x_1), \dots, M(x_n) \rangle$

Мультимножества

Основные операции над мультимножествами M, N с одной основой X:

- $M \cup N$ — объединение мультимножеств:
  $(M \cup N)(x) = \max(M(x), N(x))$
- $M + N$ — сумма мультимножеств: $(M + N)(x) = M(x) + N(x)$
- $M \cap N$ — пересечение мультимножеств: $(M \cap N) = \min(M(x), N(x))$
- $M - N$ — разность мультимножеств: $(M - N)(x) = M(x) \dot{-} N(x)$, где $\dot{-}$ — операция усечённой разности:
  $$a \dot{-} b = \begin{cases} a - b, & \text{если } a \geq b; \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример: если $M = \langle 3, 5, 1 \rangle$ и $N = \langle 2, 0, 4 \rangle$, то
$$((M \cap N) + M) - (M \cup N) = \langle 2, 0, 0 \rangle$$

Сети Петри: синтаксис

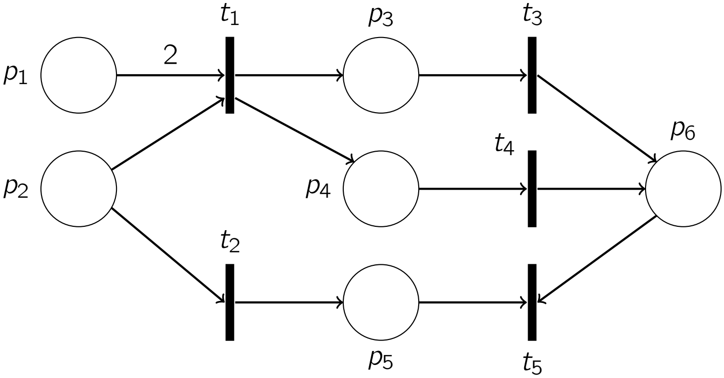
Обыкновенная сеть Петри — это система $\pi = (P, T, E, W)$, где:

- (P, T, E) — сеть с конечными множествами P и T
- W — распределение весов дуг сети: мультимножество с основой E, такое что каждый элемент E входит в W хотя бы один раз

Содержательное пояснение: $W(e)$ — это то, сколько фишек поглотится или породится при срабатывании перехода соответственно для дуги, входящей в переход и исходящей из него

Сети Петри: синтаксис

Пример обыкновенной сети Петри $\pi = (P, T, E, W)$:



Вес дуги принято изображать возле дуги, которой этот вес присвоен

Если вес дуги не изображён, то он считается равным 1

Для изображённой выше обыкновенной сети Петри верно следующее:

- $W(p_1, t_1) = 2$
- для остальных дуг e: $W(e) = 1$

Сети Петри: синтаксис

Разметка сети с множеством позиций P — это мультимножество с основой P

Для разметки M и позиции p будем говорить, что в этой позиции лежит $M(p)$ фишек в разметке M

Маркированная обыкновенная сеть Петри — это система $\pi = (P, T, E, W, M_0)$, где:

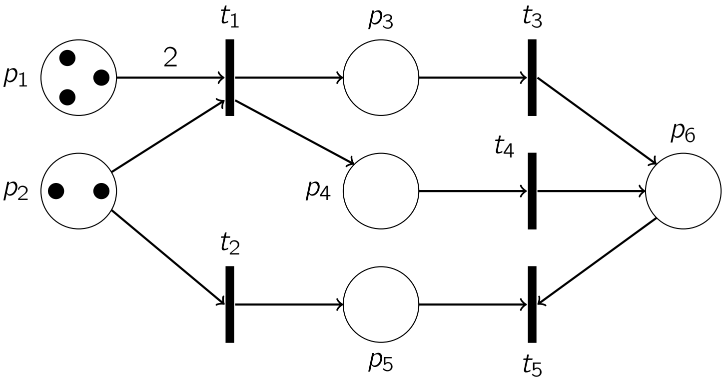
- (P, T, E, W) — (*немаркированная*) обыкновенная сеть Петри
- M_0 — начальная разметка сети

Содержательное пояснение: $M_0(p)$ — это то, сколько фишек лежит в позиции p в начале выполнения сети

Будем опускать упоминание маркированности (или немаркированности) сетей Петри, если это свойство (наличие или отсутствие компонента M_0) ясно из контекста или неважно

Сети Петри: синтаксис

Пример маркированной обыкновенной сети Петри $\pi = (P, T, E, W, M)$:



Для изображённой выше сети Петри и порядка позиций $\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rangle$ верно $M = \langle 3, 2, 0, 0, 0, 0 \rangle$

Сети Петри: семантика

$\mathcal{M}_P$ — так будем обозначать множество всех разметок сети для множества позиций P

Будем говорить, что разметка M_1 покрывается разметкой M_2 ($M_1 \preceq M_2$), если для для любой позиции p верно $M_1(x) \leq M_2(x)$

Пример: $\langle 2, 4, 0, 1 \rangle \preceq \langle 3, 4, 2, 2 \rangle, \quad \langle 2, 4, 0, 1 \rangle \not\preceq \langle 3, 3, 2, 2 \rangle$

Отношение покрытия $\preceq$ — это отношение теоретико-множественного включения $\subseteq$, адаптированное к мультимножествам

Утверждение. Для любого множества позиций P отношение $\preceq$ является отношением нестрогого частичного порядка

Доказательство. *Рефлексивность* следует из того, что для любой размети M и любой позиции p верно $M(p) \leq M(p)$

Транзитивность: если $M_1 \preceq M_2 \preceq M_3$, то для любой позиции p верно $M_1(p) \leq M_2(p) \leq M_3(p)$, а значит, для любой позиции p верно и $M_1(p) \leq M_3(p)$, то есть $M_1 \preceq M_3$

Антисимметричность: если $M_1 \preceq M_2$ и $M_2 \preceq M_1$, то для любой мозиции p верно $M_1(p) \leq M_2(p)$ и $M_2(p) \leq M_1(p)$, а значит, $M_1(p) = M_2(p)$, то есть $M_1 = M_2$ ▼

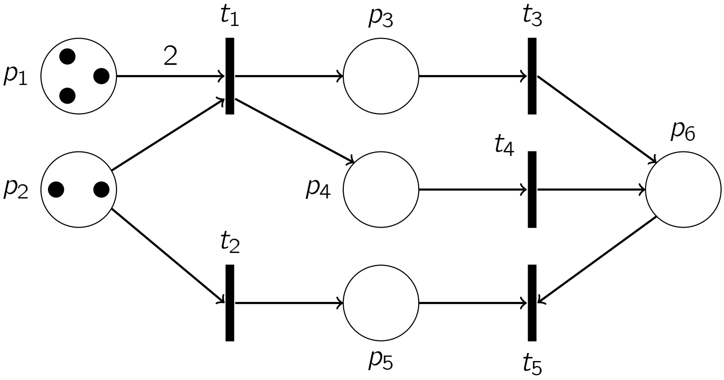
Сети Петри: семантика

Для обыкновенной сети Петри (P, T, E, W) и её вершин x, y и перехода t введём следующие обозначения:

- $E_W(x, y) = \begin{cases} W(x, y), & \text{если } (x, y) \in E; \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$
- $E_W(\bullet, t)$ — разметка, определяемая равенством $E_W(\bullet, t)(p) = E_W(p, t)$
- $E_W(t, \bullet)$ — разметка, определяемая равенством $E_W(t, \bullet)(p) = E_W(t, p)$

Сети Петри: семантика

Пример:



Для этой сети Петри (P, T, E, W) верно следующее:

$$E_W(\bullet, t_1) = \langle 2, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle \qquad E_W(\bullet, t_4) = \langle 0, 0, 0, 1, 0, 0 \rangle$$

$$E_W(t_1, \bullet) = \langle 0, 0, 1, 1, 0, 0 \rangle \qquad E_W(t_5, \bullet) = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

Сети Петри: семантика

Переход t сети Петри $\pi = (P, T, E, W)$ активен (может сработать) в разметке M, если верно $E_W(\bullet, t) \preceq M$, а иначе неактивен

Разметка, в которой все переходы неактивны, называется тупиковой

Результат срабатывания перехода t в разметке M — это разметка $(M - E_W(\bullet, t)) + E_W(t, \bullet)$

Отношение срабатывания перехода t ($\xrightarrow{t}$) — это двуместное отношение на множестве разметок, такое что $M \xrightarrow{t} K$ тогда и только тогда, когда верно следующее:

1. Переход t активен в M
2. K — результат срабатывания t в M

Сети Петри: семантика

Отношение $\xrightarrow{\pi}$ шага вычисления сети Петри π введём так: $\xrightarrow{\pi} = \bigcup\limits_{t \in T} \xrightarrow{t}$

То есть соотношение $M \xrightarrow{\pi} K$ означает, что K является результатом срабатывания хотя бы одного активного перехода сети в разметке M

Вычислением сети Петри π из разметки M называется (конечная или бесконечная) последовательность разметок

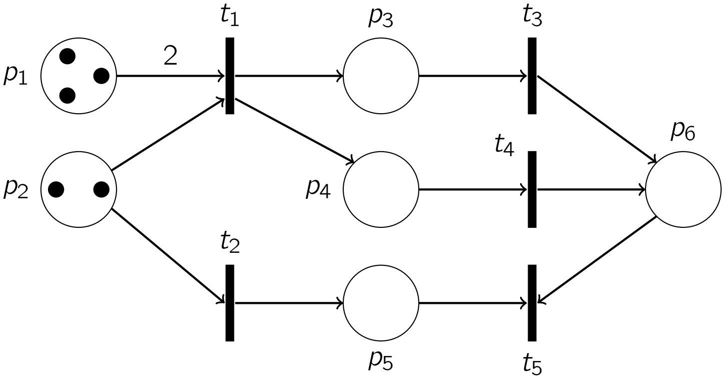
$$M_1 \xrightarrow{\pi} M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \xrightarrow{\pi} \dots,$$

в которой $M_1 = M$

Вычислением маркированной сети Петри π называется её вычисление из начальной разметки

Сети Петри: семантика

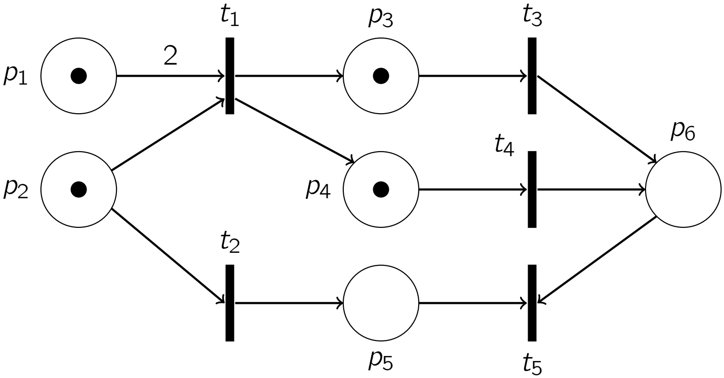
Пример вычисления сети



$\langle 3, 2, 0, 0, 0, 0 \rangle$

Сети Петри: семантика

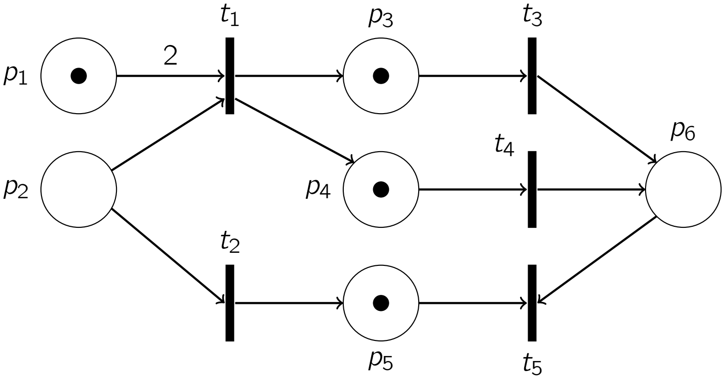
Пример вычисления сети



$$\langle 3, 2, 0, 0, 0, 0 \rangle \xrightarrow{t_1} \langle 1, 1, 1, 1, 0, 0 \rangle$$

Сети Петри: семантика

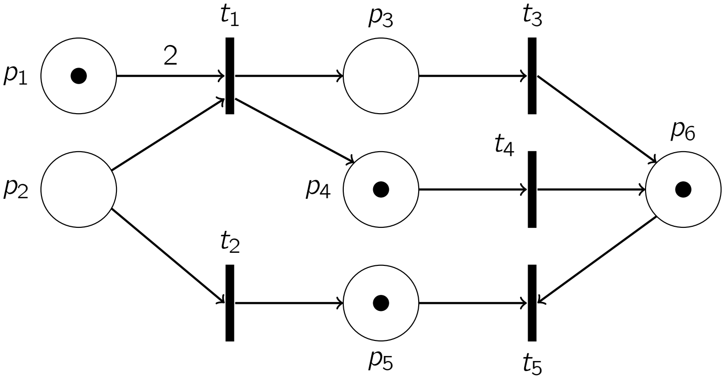
Пример вычисления сети



$$\langle 3, 2, 0, 0, 0, 0\rangle \xrightarrow{t_1} \langle 1, 1, 1, 1, 0, 0\rangle \xrightarrow{t_2} \langle 1, 0, 1, 1, 1, 0\rangle$$

Сети Петри: семантика

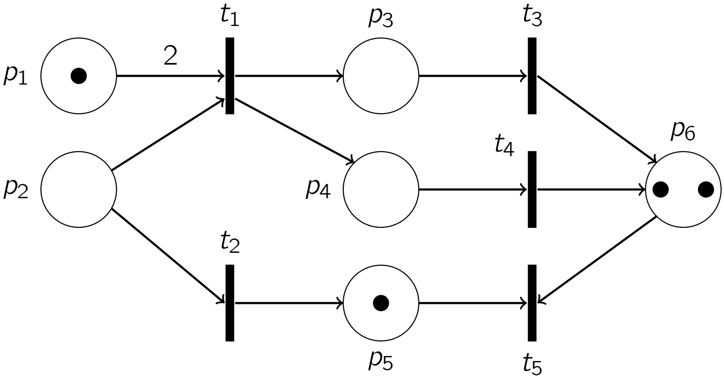
Пример вычисления сети



$$\langle 3,2,0,0,0,0\rangle \xrightarrow{t_1} \langle 1,1,1,1,0,0\rangle \xrightarrow{t_2} \langle 1,0,1,1,1,0\rangle \xrightarrow{t_3} \langle 1,0,0,1,1,1\rangle$$

Сети Петри: семантика

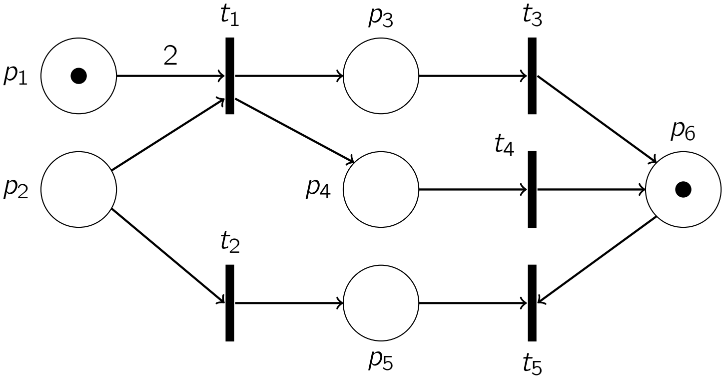
Пример вычисления сети



$$\langle 3,2,0,0,0,0\rangle \xrightarrow{t_1} \langle 1,1,1,1,0,0\rangle \xrightarrow{t_2} \langle 1,0,1,1,1,0\rangle \xrightarrow{t_3}$$
$$\langle 1,0,0,1,1,1\rangle \xrightarrow{t_4} \langle 1,0,0,0,1,2\rangle$$

Сети Петри: семантика

Пример вычисления сети



$$\langle 3,2,0,0,0,0\rangle \xrightarrow{t_1} \langle 1,1,1,1,0,0\rangle \xrightarrow{t_2} \langle 1,0,1,1,1,0\rangle \xrightarrow{t_3}$$
$$\langle 1,0,0,1,1,1\rangle \xrightarrow{t_4} \langle 1,0,0,0,1,2\rangle \xrightarrow{t_5} \langle 1,0,0,0,0,1\rangle$$

Последняя конфигурация этого вычисления является тупиковой, и продолжить его до более длинного вычисления невозможно

Сети Петри: семантика

Разметка K достижима из разметки M в сети Петри π ($M \xrightarrow{\pi}{}^{*} K$), если существует последовательность разметок

$$M_1 \xrightarrow{\pi} M_2 \xrightarrow{\pi} \dots \xrightarrow{\pi} M_k,$$

такая что $k \geq 1$, $M_1 = M$ и $M_k = K$

$R(\pi, M)$ — так обозначим множество всех разметок, достижимых из M в π

Разметка M достижима в маркированной сети Петри π, если она достижима из начальной разметки этой сети

$R(\pi)$ — так обозначим множество всех разметок, достижимых в π

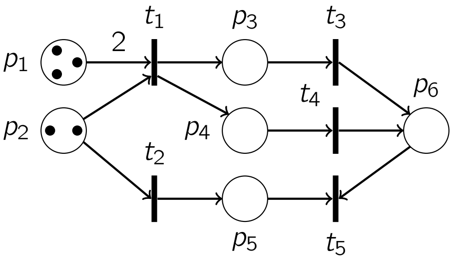
Графом переходов сети Петри π назовём (возможно, бесконечный) орентированный размеченный граф, устроенный следующим образом:

- Множество вершин графа — $R(\pi)$
- Начальная разметка сети π (если она есть) является корнем графа
- Дуга $M \xrightarrow{t} K$ для перехода t содержится в графе $\Leftrightarrow$ $M, K \in R(\pi)$ и $M \xrightarrow{t} K$

По построению, множество всех путей в графе переходов сети Петри совпадает с множеством всех вычислений этой сети

Сети Петри: семантика

Пример:



Фрагмент графа переходов этой сети:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & \boxed{\langle 3,2,0,0,0,0\rangle} \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dr, "t_2"] & & \\
& \langle 1,1,1,1,0,0\rangle \arrow[dl, "t_3"'] \arrow[dd, "t_4"'] \arrow[dr, "t_2"] & & \langle 3,1,0,0,1,0\rangle \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dr, "t_2"] & \\
\langle 1,1,0,1,0,1\rangle & & \langle 1,0,1,1,1,0\rangle & & \langle 3,0,0,0,2,0\rangle \\
& \langle 1,1,1,0,0,1\rangle & & & \text{тупиковая разметка} \\
& \dots & & &
\end{tikzcd}
$$

Сети Петри: семантика

Теорема (о монотонности сетей Петри). Пусть

- $\pi = (P, T, E, W)$ **— обыкновенная сеть Петри**
- M **и** K **— разметки**
- t **— переход сети** π**, активный в разметке** M
- M' **— результат срабатывания** t **в** M

Тогда переход t **активен в разметке** $(M + K)$**, и результатом срабатывания** t **в** $(M + K)$ **является разметка** $(M' + K)$

Доказательство.

Активность t в M означает, что $E_W(\bullet, t) \preceq M$

При этом $M \preceq M + K$, и отношение $\preceq$ транзитивно

Следовательно $E_W(\bullet, t) \preceq M + K$, то есть переход t активен в разметке $(M + K)$

Результатом срабатывания t в $(M + K)$ является разметка $((M + K) - E_W(\bullet, t)) + E_W(t, \bullet) = ((M - E_W(\bullet, t)) + K) + E_W(t, \bullet) = ((M - E_W(\bullet, t)) + E_W(t, \bullet)) + K = M' + K$ ▼

Сети Петри: семантика

В теореме о монотонности сетей Петри сформулировано ключевое свойство этой модели, на котором основывается анализ основных алгоритмических свойств сетей

Распространив это свойство со срабатывания одного перехода на срабатывание последовательности переходов, можно естественно получить следующее утверждение

Следствие. **Для любых обыкновенной сети Петри π, переходов $t_1, \ldots, t_k$ и разметок M, M', K верно следующее:**

- **Если** $M \xrightarrow{t_1} \ldots \xrightarrow{t_k} M'$**, то** $M + K \xrightarrow{t_1} \ldots \xrightarrow{t_k} M' + K$
- **Если** $M \xrightarrow{\pi}{}^{*} M'$**, то** $M + K \xrightarrow{\pi}{}^{*} M' + K$
- **Если** $M' \in R(\pi, M)$**, то** $M' + K \in R(\pi, M + K)$