Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 9

Метод семантичесских таблиц
в логике предикатов:
семантические таблицы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

Вступление

Из блока 8:

$$\langle \mid \mathtt{x} \to \mathtt{x} \vee \mathtt{y} \rangle$$

$$\Big\downarrow R\to$$

$$\langle \mathtt{x} \mid \mathtt{x} \vee \mathtt{y} \rangle$$

$$\Big\downarrow R\vee$$

$$\langle \mathtt{x} \mid \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle$$

закрытая таблица

Это успешный табличный вывод в логике высказываний, обосновывающий общезначимость формулы $\mathtt{x} \to \mathtt{x} \vee \mathtt{y}$

Попробуем адаптировать понятие семантической таблицы и в целом метод семантических таблиц к логике предикатов

Определения

Семантическая таблица (*логики предикатов*) — это упорядоченная пара множеств формул (*логики предикатов*): $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$

Таблица T закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Таблица T атомарна, если все формулы из $\Gamma \cup \Delta$ атомарны

Эти определения дословно перенесены из логики высказываний

Пусть $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица T выполнима, если существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$ из области интерпретации, такие что

- $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для любой формулы φ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для любой формулы ψ из Δ

А это определение по сравнению с логикой высказываний усложнилось: добавились предметы, оценивающие свободные переменные формул

Примеры

1. $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$

Эта таблица атомарна, незакрыта и выполнима

Выполнимость подтверждается интерпретацией, в которой

$$\mathsf{D} = \{d\},\ \overline{\mathrm{P}}(d) = \mathbb{t} \text{ и } \overline{\mathrm{Q}}(d, d) = \mathbb{f},$$

и значением d переменной x

2. $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$

Эта таблица атомарна, закрыта и невыполнима

3. $\langle \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$

Эта таблица неатомарна, закрыта и невыполнима

4. $\langle \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}), \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}) \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathrm{x})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \rangle$

Эта таблица неатомарна, незакрыта и выполнима

Выполнимость подтверждается интерпретацией, в которой

$$\mathsf{D} = \{d_1, d_2\},\ \overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbb{t} \text{ и } \overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbb{f},$$

и набором d_1, d_2 значений переменных x, y

Основные утверждения

Теорема (о табличной проверке общезначимости в ЛП)
Для любой формулы φ справедлива равносильность

$$\models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \textbf{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \textbf{ невыполнима}$$

Доказательство.

$$\models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d}^n] \text{ для любой интерпретации } \mathcal{I}$$
$$\text{и любого набора предметов } \widetilde{d}^n$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима} \quad \blacktriangledown$$

Утверждение. **Любая закрытая таблица невыполнима**

Утверждение. **Любая незакрытая атомарная таблица выполнима**

Доказательство (утверждений). А попробуйте сами