Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 28

Даша, Саша, Паша, пиво
и метод семантических таблиц
с методом резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Вступление

В блоке 6 была в качестве иллюстрации предложена такая задача

Дано:

- Даша любит Сашу,
$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С})$$
- а Саша любит пиво,
$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п})$$
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он
$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}) \\ \psi_1 &= \forall \mathrm{x}\, (\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x})) \end{aligned}$$

Выяснить, любит ли кто-нибудь Дашу
$$\chi = \exists \mathrm{x}\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$$
$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi?$$

Или, по теореме о логическом следствии:
$$\models \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi?$$

Попробуем решить эту задачу
методом семантических таблиц и методом резолюций

Решение методом семантических таблиц

$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \qquad \psi_1 = \forall \mathrm{x}\, (\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}))$$

$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) \qquad \psi_2 = \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y}))$$

$$\varphi_3 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}) \qquad \psi_3 = \psi_2 \to \varphi_4$$

$$\varphi_4 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С})$$

$$\chi = \exists \mathrm{x}\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$$

$$\langle \ \mid \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi \rangle$$

$$\downarrow R\!\to,\ L\&,\ L\&,\ L\&$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_3 \mid \chi \rangle$$

$$\swarrow \quad L\!\to \quad \searrow$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2 \rangle$$

$$\downarrow R\exists$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \rangle$$

$$\swarrow \quad R\& \quad \downarrow$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2, \varphi_2 \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2, \varphi_3 \rangle$$

Решение методом семантических таблиц

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) & \psi_1 = \forall \mathrm{x}\,(\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x})) \\
\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) & \psi_2 = \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y})) \\
\varphi_3 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}) & \psi_3 = \psi_2 \to \varphi_4 \\
\varphi_4 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С}) & \psi_4 = \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{Д}, \mathrm{y})) \\
\varphi_5 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{Д}) & \psi_5 = \psi_4 \to \varphi_5 \\
\chi = \exists \mathrm{x}\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д}) &
\end{array}
$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1, \psi_5 \mid \chi \rangle$$

$$L\to$$

$$
\begin{array}{cc}
\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1 \mid \chi \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4 \rangle \\
\downarrow R\exists & \downarrow R\exists \\
\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1 \mid \chi, \varphi_5 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_4 \,\&\, \varphi_1 \rangle
\end{array}
$$

$$R\&$$

$$
\begin{array}{cc}
\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_4 \rangle
\end{array}
$$

Получен успешный табличный вывод

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

Решение методом резолюций

$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \quad \varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) \quad \varphi_3 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п})$$

$$\psi_1 = \forall \mathrm{x}\, (\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}))$$

$$\chi = \exists \mathrm{x}\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$$

$$\models \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi?$$

Этап 1: поставим отрицание над формулой

$$\neg(\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi)$$

Этап 2: построим равносильную ПНФ

$$\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z} \left(\begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}) \\ \&(\neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x})) \\ \& \neg\mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) \end{array} \right)$$

Этап 3: построим равновыполнимую ССФ

Формула выше — ССФ

Этап 4: перейдём к системе дизъюнктов

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{п}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{п}), \\ \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}), \\ \neg\mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) \end{array} \right\}$$

Решение методом резолюций

Этап 5: попробуем вывести пустой дизъюнкт

$$\left\{\begin{matrix} L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}), \quad L(\mathbf{С}, \mathbf{п}), \quad L(\mathbf{П}, \mathbf{п}), \\ \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\mathbf{П}, x), \\ \neg L(z, \mathbf{Д}) \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \neg L(\mathbf{П}, y') \vee \neg L(x', y') \vee L(\mathbf{П}, x') \arrow[d, "{\{z/\mathbf{П}, x'/\mathbf{Д}, y'/y\}}"'] & & \neg L(\mathbf{П}, y') \vee \neg L(x', y') \vee L(\mathbf{П}, x') \arrow[d, "{\{x'/\mathbf{С}, y'/y\}}"'] & & L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
\neg L(z, \mathbf{Д}) \arrow[r] & \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(\mathbf{Д}, y) \arrow[r] & \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{С}) \arrow[r] & \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(\mathbf{С}, y) \arrow[r] & \neg L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) \arrow[r] & \square \\
 & & L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) \arrow[u, "{\{y/\mathbf{С}\}}"] & & L(\mathbf{П}, \mathbf{п}) \arrow[u, "{\{y/\mathbf{п}\}}"] &
\end{tikzcd}$$

Это успешный входной резолютивный вывод $\square$,
инициированный дизъюнктом $\neg L(z, \mathbf{Д})$

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

А кто?

Решение методом резолюций

$$\begin{array}{cl}
\neg L(z, \textbf{Д}) & \\
\downarrow & \theta_1 = \{z/\textbf{П}, x'/\textbf{Д}, y'/y\} \\
\neg L(\textbf{П}, y) \vee \neg L(\textbf{Д}, y) & \\
\downarrow & \theta_2 = \{y/\textbf{С}\} \\
\neg L(\textbf{П}, \textbf{С}) & \\
\downarrow & \theta_3 = \{x'/\textbf{С}, y'/y\} \\
\neg L(\textbf{П}, y) \vee \neg L(\textbf{С}, y) & \\
\downarrow & \theta_4 = \{y/\textbf{п}\} \\
\neg L(\textbf{С}, \textbf{п}) & \\
\downarrow & \theta_5 = \varepsilon \\
\square &
\end{array}$$

Тайный поклонник Даши в выводе обозначен переменной z

Посмотрим, как эта переменная изменялась унификаторами:

$$z\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \textbf{П}$$

Оказывается, что Дашу любит Паша
(*могут быть и другие поклонники, но про них мы ничего не знаем*)

А что это за «трюк» с применением подстановок,
в каких случаях и как именно он работает?

Заключительный пример

Перед детальным обсуждением этого «трюка» —
пример задачи, для которой так вычислить ответ нельзя

- Если вечером будет дождь, то мы пойдём в кино
$$\text{Будет}(\textbf{дождь}) \to \text{Досуг}(\textbf{кино})$$
- Если вечером дождя не будет, то мы пойдём гулять в парк
$$\neg\text{Будет}(\textbf{дождь}) \to \text{Досуг}(\textbf{парк})$$

Где мы проведём этот вечер?

Действуя по аналогии с задачей о Даше, Саше, Паше и пиве, вопрос можно ослабить так, понадеявшись на тот же «трюк» с вычислением:
Есть ли такое место, которое мы посетим этим вечером?
$$\exists x\ \text{Досуг}(x)\ ?$$

Заключительный пример

По аналогии с задачей о Даше, Саше, Паше и пиве получим систему дизъюнктов:

$$\left\{\begin{array}{l} \neg\text{Будет}(\textbf{дождь}) \vee \text{Досуг}(\textbf{кино}) \\ \text{Будет}(\textbf{дождь}) \vee \text{Досуг}(\textbf{парк}) \\ \neg\text{Досуг}(\text{x}) \end{array}\right\}$$

Такое место действительно существует:

$$\begin{tikzcd}
\neg\text{Будет}(\textbf{дождь}) \vee \text{Досуг}(\textbf{кино}) \arrow[dd, "\{\text{x}/\textbf{кино}\}"'] & & \text{Будет}(\textbf{дождь}) \vee \text{Досуг}(\textbf{парк}) \arrow[dd, "\{\text{x}/\textbf{парк}\}"] \\
& \neg\text{Досуг}(\text{x}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\neg\text{Будет}(\textbf{дождь}) \arrow[dr] & & \text{Будет}(\textbf{дождь}) \arrow[dl] \\
& \square &
\end{tikzcd}$$

Но по выводу невозможно понять, куда же мы пойдём

Это невозможно понять и с использованием любых других методов, пока не станет известно, есть ли вечером дождь