Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 27

Стратегии резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

В методе резолюций, как и в методе семантических таблиц, есть свобода выбора (*таблиц; термов; дизъюнктов*), позволяющая строить существенно различающиеся выводы

Например: (*переименование дизъюнктов опущено для наглядности*)

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 : \neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \varphi_2 : \mathrm{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \varphi_3 : \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \\ \varphi_4 : \neg \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \\ \varphi_5 : \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \end{array} \right\}$$

Вывод из S можно устроить, например, так:

$$\neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \underset{\uparrow}{\overset{\varphi_5}{\downarrow}}\!\!\!\!\!\!\;\; \neg \mathrm{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \square$$

$$\neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \xrightarrow{\varphi_5} \neg \mathrm{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \xrightarrow{\varphi_2} \square$$

$$\neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \neg \mathrm{Q}(\mathbf{a}, \mathrm{y}) \overset{\overset{\varphi_4}{\downarrow}}{\vee} \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathbf{b}) \to \neg \mathrm{Q}(\overset{\overset{\varphi_3}{\downarrow}}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) \to \infty$$

$$\neg \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \to \begin{array}{l} \neg \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \vee \\ \neg \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{y}') \vee \neg \mathrm{Q}(\underset{\underset{\varphi_4}{\uparrow}}{\mathrm{y}'}, \mathrm{z}) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \end{array} \to \infty$$

Стратегии резолютивного вывода

От способа применения правил резолютивного вывода существенно зависит возможность вывести $\square$

Стратегия резолютивного вывода — это набор ограничений на выбор дизъюнктов, к которым применяются правила при построении вывода

Стратегия резолютивного вывода называется полной, если для любой невыполнимой системы дизъюнктов S существует вывод $\square$ из S, построенный согласно этой стратегии

Например,
стратегия, никак не ограничивающая выбор дизъюнктов, полна — но существуют и более «эффективные» полные стратегии

Семантическая резолюция

По своему усмотрению выберем интерпретацию $\mathcal{I}$

$\mathcal{I}$-резолюция — это стратегия с одним (следующим) ограничением: Для дизъюнктов D_1, D_2, к которым применяется правило резолюции, должно быть верно $\mathcal{I} \models D_1$ и $\mathcal{I} \not\models D_2$

Резолютивный вывод, построенный согласно $\mathcal{I}$-резолюции, называется $\mathcal{I}$-резолютивным выводом

Пример: для эрбрановской интерпретации $\mathcal{I} = \emptyset$ и системы

$$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C, \quad A \vee C, \quad B \vee C, \quad \neg C\}$$

один из $\mathcal{I}$-резолютивных выводов выглядит так:

$(\mathcal{I} \models D_i)$	$(\mathcal{I} \not\models D_i)$
$D_1 = \neg A \vee \neg B \vee C$	$D_3 = A \vee C$
$D_2 = \neg C$	$D_4 = B \vee C$
$D_1, D_3 \to D_5 = \neg B \vee C \vee C$	$D_2, D_3 \to D_9 = A$
$D_5 \to D_6 = \neg B \vee C$	$D_2, D_4 \to D_{10} = B$
$D_1, D_4 \to D_7 = \neg A \vee C \vee C$	$D_6, D_{10} \to D_{11} = C$
$D_7 \to D_8 = \neg A \vee C$	$D_2, D_{11} \to D_{12} = \square$

Семантическая резолюция

Теорема (о полноте семантической резолюции)
$\mathcal{I}$-резолюция полна для любой интерпретации $\mathcal{I}$

Иными словами, для любой невыполнимой системы дизъюнктов S и любой интерпретации $\mathcal{I}$ существует $\mathcal{I}$-резолютивный вывод $\square$ из S

Доказательство приводить не будем, отметив только, что оно следует предложенной ранее схеме обоснования полноты резолютивного вывода, и что существенные исправления требуется внести только в лемму об основных дизъюнктах

Входная резолюция

Входной резолютивный вывод из системы S, инициированный дизъюнктом D этой системы, устроен так:

- Нечётные дизъюнкты вывода (при нумерации с единицы) называются центральными, чётные — боковыми
- Первый дизъюнкт вывода — это D
- Все боковые дизъюнкты являются вариантами дизъюнктов из S
- Каждый центральный дизъюнкт, кроме первого, — это резольвента двух предшествующих дизъюнктов

Проще говоря, во входном выводе каждый следующий центральный дизъюнкт — это резольвента предыдущего центрального дизъюнкта и варианта дизъюнкта исходной системы

Входная резолюция — это стратегия, согласно которой разрешено строить любые входные резолютивные выводы и только их

Входная резолюция

Пример: один из входных резолютивных выводов из системы

$$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C, \quad A \vee C, \quad B \vee C, \quad \neg C\}$$

устроен так:

$$\begin{tikzcd}
\neg C \arrow[d] & \neg A \vee \neg B \vee C \arrow[dl] \\
\neg A \vee \neg B \arrow[d] & A \vee C \arrow[dl] \\
\neg B \vee C \arrow[d] & \neg C \arrow[dl] \\
\neg B \arrow[d] & B \vee C \arrow[dl] \\
C \arrow[d] & \neg C \arrow[dl] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Входная резолюция

Теорема (о неполноте входной резолюции)

Входная резолюция неполна

Доказательство

Вот пример системы,
из которой не существует входного резолютивного вывода $\square$:

$$S = \{A \vee A, \quad \neg A \vee \neg A\}$$

При построении входного вывода
запрещено применять правило склейки, а значит,
все дизъюнкты входного вывода из S содержат ровно две литеры ▼

Запрет на применение правила склейки —
не единственная причина неполноты входной резолюции

Даже если добавить возможность склеивать дизъюнкт перед построением резольвенты, то (*как можно показать полным перебором*) невозможно вывести $\square$, например, из невыполнимой системы

$$\{A \vee C, \quad \neg A \vee C, \quad B \vee \neg C, \quad \neg B \vee \neg C\}$$