Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 7

Модели Крипке

Особенности моделирования систем

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Модели Крипке

Обычно модель в рамках метода model checking устроена так:

- Моделью задаётся множество состояний: «слепков» системы, в которых записаны рассматриваемые особенности системы в заданные моменты времени выполнения
- Состояния могут изменяться посредством выполнения переходов, изменяющих текущее состояние согласно выполнению заданных действий системой
- Выполнение системы в неограниченном времени соответствует вычислению модели: бесконечной последовательности состояний, получающейся из заданного состояния выполнением переходов

Модели Крипке

Model checking применяется *в основном* для анализа систем с **конечным** числом состояний

Это ещё один недостаток метода, затрудняющий его широкое использование: на практике число состояний системы нередко бесконечно или конечно, но настолько велико, что можно считать его практически бесконечным

Тем не менее, существуют и важные классы систем, заведомо обладающие конечным числом состояний: контроллеры, драйверы, многие коммуникационные протоколы, не слишком объёмная аппаратура, ...

Модели Крипке

Обсуждение моделей вычислительных систем начнём немного издалека, с классической головоломки про волка, козу и капусту

На левом берегу реки располагаются волк (), коза (), капуста () и лодочник с лодкой ()

 может переправиться на противоположный берег в лодке, взяв с собой не более одного пассажира ( ,  , )

Оставшись на берегу без  ,  может съесть  , а  может съесть 

Как  может безопасно переправить  ,  и  на правый берег?

Модели Крипке

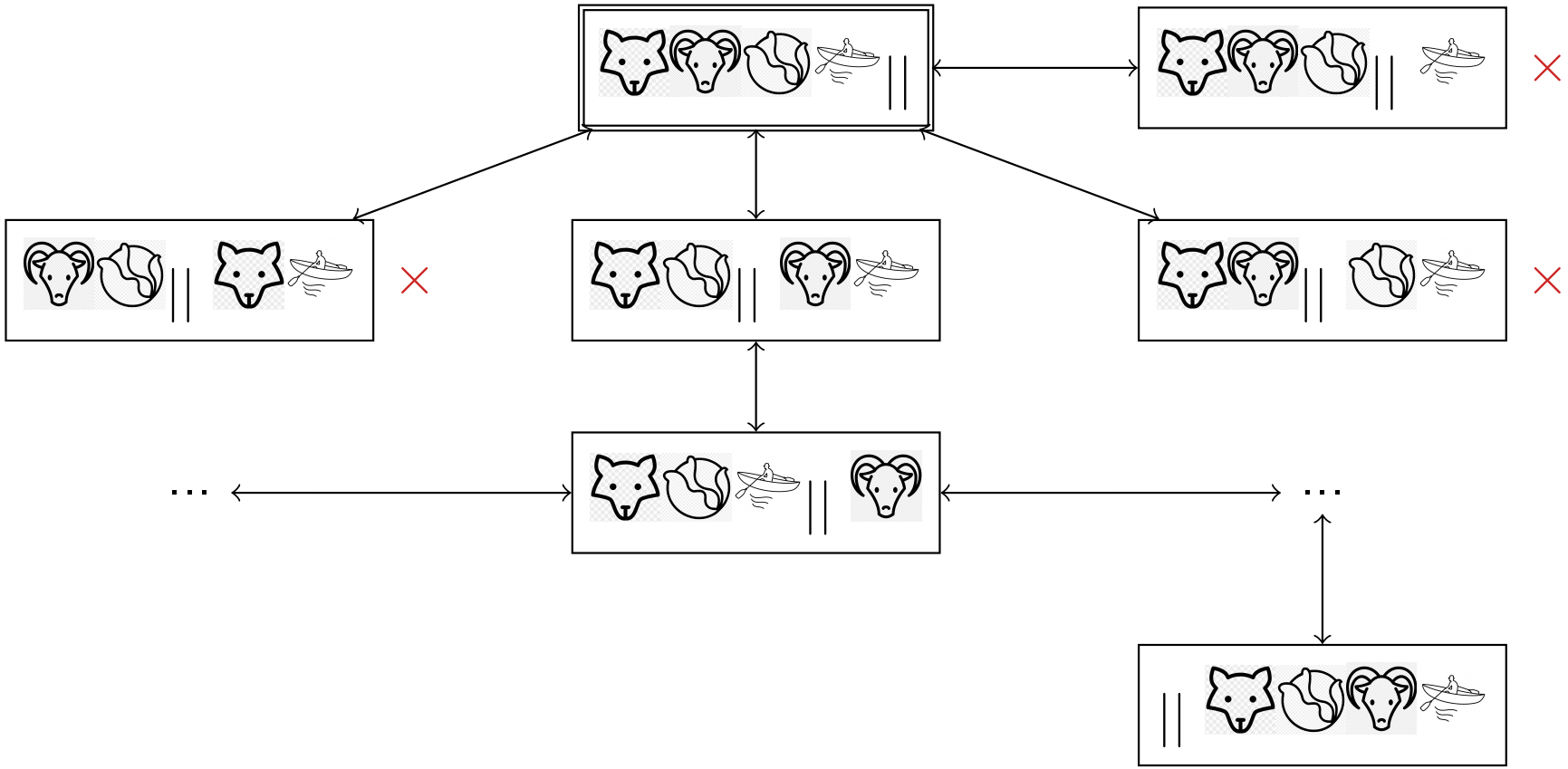
Чтобы решить эту головоломку, достаточно

- перебрать всевзможные варианты расположения  ,  ,  и  , получающиеся из начального расположения согласно всевозможным действиям 
  - это **состояния** системы

- разделить состояния на “плохие” (кто-то кого-то может съесть) и “хорошие” (остальные)
  - пометим плохие состояния символом $\times$

- посмотреть, как достичь состояния “все на правом берегу”, ни разу не встретив $\times$

Модели Крипке



□ — **состояния** системы

▣ — **начальное** состояние

$\rightarrow$ — **переходы** системы

$\times$ — **атомарное высказывание**: свойство состояний системы, которое мы по тем или иным причинам посчитали необходимым для рассмотрения

Модели Крипке

Для множества X записью 2^X будем обозначать множество всех подмножеств X

Модель Крипке над множеством атомарных высказываний AP — это система $M = (S, S_0, \to, L)$, где:

- S — множество состояний
- S_0 — множество начальных состояний, $S_0 \subseteq S$
- $\to \subseteq S \times S$ — тотальное отношение переходов
- $L : S \to 2^{\mathrm{AP}}$ — функция разметки

Тотальность отношения переходов означает, что для любого состояния s существует состояние s', такое что $s \to s'$

Событием будем называть произвольное множество атомарных высказываний (элемент семейства 2^{AP})

Модели Крипке

($M = (S, S_0, \to, L)$ — *модель Крипке над* AP)

Соотношение $L(s) = \sigma$ можно понимать так: состояние s обладает свойствами, отвечающими атомарным высказываниям из σ, и не обладает остальными свойствами, отвечающими атомарным высказываниям

Будем говорить, что модель M конечна, если конечны множества S и AP

Модель M представляет собой особый размеченный ориентированный граф: S — это вершины, $\to$ — это дуги, остальное — это метки вершин

В связи с этим будем графовые обозначения и графовую терминологию по отношению к моделям Крипке

Путь, исходящий из начального состояния модели, будем называть начальным

Бесконечный начальный путь будем наывать вычислением модели

Модели Крипке

$(M = (S, S_0, \to, L)$ — *модель Крипке над* AP$)$

Трассой будем называть бесконечную последовательность событий

Трассой пути $s_0 \to s_1 \to s_2 \to \dots$ будем называть трассу, состоящую из событий, помечающих состояния этого пути:

$$L(s_0), L(s_1), L(s_2), \dots$$

Для последовательности $\mathfrak{S} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ (в том числе для пути и для трассы) будем использовать такие обозначения:

- $\mathfrak{S}[i] = x_i$ — i-й элемент последовательности, нумерация с ноля
- $\mathfrak{S}^i = (x_i, x_{i+1}, \dots)$ — суффикс последовательности, начинающийся с i-го элемента

Особенности моделирования систем

Моделирование программ

Рассмотрим императивную программу π, выполняющуюся в интерпретации $\mathcal{I}$ на произвольной оценке данных множества Θ
Модель $M_{\pi,\mathcal{I},\Theta} = (S, S_0, \to, L)$, отвечающая такому выполнению, может быть устроена так:

- S — это множество всех состояний вычисления программы
- $S_0 = \{\langle \pi \mid \theta \rangle \mid \theta \in \Theta\}$
- $\to$ — отношение переходов программы, в которое добавлены всевозможные пары вида $\langle \emptyset \mid \theta \rangle \to \langle \emptyset \mid \theta \rangle$
- AP — всевозможные пары $(\mathtt{x}, d)$, где $\mathtt{x}$ — переменная программы и d — предмет из $\mathcal{I}$
- $(\mathtt{x}, d) \in L(\langle \pi' \mid \theta \rangle) \Leftrightarrow \overline{\theta(\mathtt{x})} = d$

Фрагментами такой модели Крипке являются вычисления программы в $\mathcal{I}$ на θ, $\theta \in \Theta$
Для других видов программ модель можно устроить дословно так же, если для программ определена операционная семантика

Особенности моделирования систем

Моделирование программ

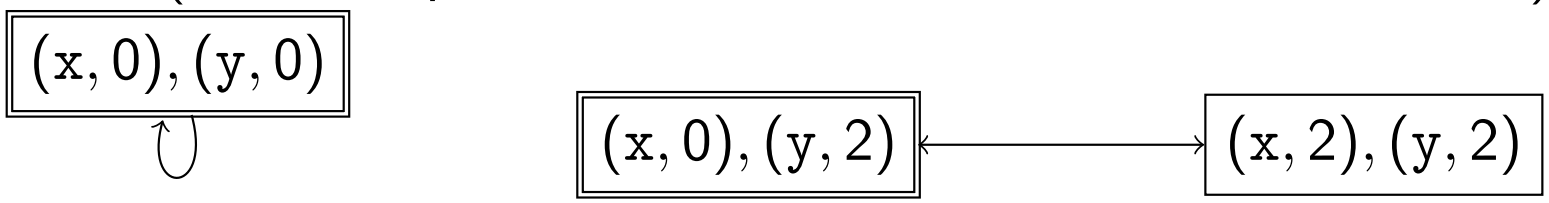
Для примера рассмóтрим программу, в которой в бесконечно (в цикле) выполняется присваивание

$$\mathtt{x} := \mathtt{x} + \mathtt{y};,$$

в двухбитовой арифметике с переполнением в модели императивных программ, но с заменой термов t в оценках данных на соответствующие предметы $\bar{t}$

Пусть известно, что в начале работы программы $\mathtt{x} = 0$, а значение $\mathtt{y}$ может быть любым

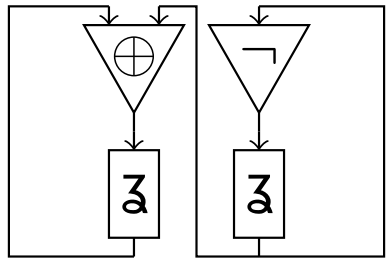
Тогда некоторые компоненты связности соответствующей модели Крипке устроены так (*можете представить себе и остальные по аналогии*):



Особенности моделирования систем

Моделирование схем

(*кто знает термин «последовательная схема» — можете представить её вместо схемы из функциональных элементов с задержкой, СФЭЗ*)



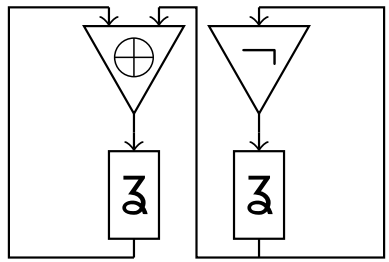
Модель $M = (S, S_0, \to, L)$, отвечающая СФЭЗ (*последовательной схеме*), может быть устроена так:

- Все элементы задержки пронумерованы: $1, 2, \ldots, n$
- $S = \{0, 1\}^n$ (*все состояния схемы*)
- $S_0 = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ (*начальное состояние схемы*)
- $s \to s' \Leftrightarrow$ при переходе к следующему моменту времени (*по переднему фронту тактового сигнала*) возможна такая смена состояния схемы
- $\mathrm{AP} = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{0, 1\}$ (*номер и состояние регистра*)
- $(i, b) \in L(b_0, b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow b_i = b$

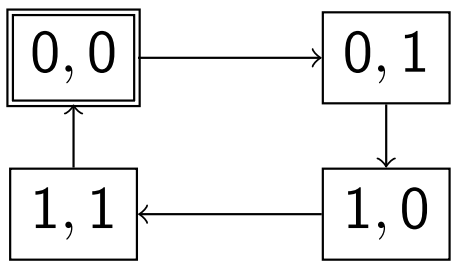
Особенности моделирования систем

Моделирование схем

(*кто знает термин «последовательная схема» — можете представить её вместо схемы из функциональных элементов с задержкой, СФЭЗ*)



Например, модель Крипке для этой схемы может быть устроена так:



Особенности моделирования систем

Моделирование параллелизма

Современные вычислительные системы зачастую состоят из набора компонентов, исполняющихся одновременно (параллельно) и взаимодействующих друг с другом

В зависимости от природы системы, при построении модели используется один из двух видов параллелизма (или их комбинация):

- Асинхронное исполнение (чередующееся исполнение; семантика чередующихся вычислений; interleaving): шаг вычисления системы отвечает одному шагу **одного** компонента, а остальные компоненты не делают ни одного шага
- Синхронное исполнение: шаг вычисления системы отвечает одновременному выполнению шага вычисления **всех** компонентов

Особенности моделирования систем

Моделирование параллелизма

Параллельная композиция моделей Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$ и $M' = (S', S'_0, \mapsto, L')$ над непересекающимися множествами атомарных высказываний — это модель $M|M' = (S \times S', S_0 \times S'_0, \rightsquigarrow, \mathcal{L})$, где:

- $\mathcal{L}(s, s') = L(s) \cup L'(s')$
- Отношение переходов $\rightsquigarrow$ определяется видом параллелизма

Синхронное исполнение характерно для аппаратных систем и других имеющих встроенные средства синхронизации компонентов

Переходы синхронной композиции моделей (*без взаимодействия компонентов*) определяются так:

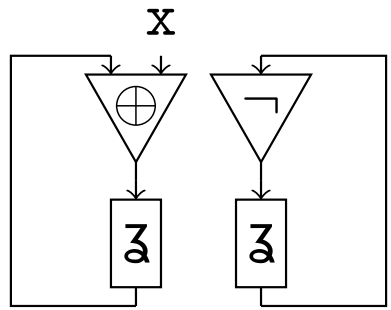
$$(s_1, s'_1) \rightsquigarrow (s_2, s'_2) \quad \Leftrightarrow \quad s_1 \to s_2 \text{ и } s'_1 \mapsto s'_2$$

Особенности моделирования систем

Моделирование параллелизма

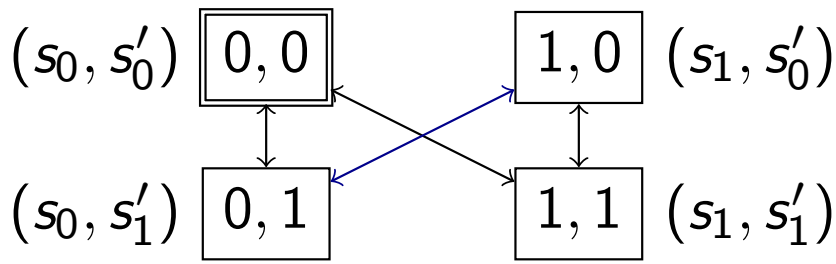
$M = (S, S_0, \to, L)$ $\quad M' = (S', S'_0, \mapsto, L')$ $\quad M|M' = (S \times S', S_0 \times S'_0, \rightsquigarrow, \mathcal{L})$

Например:



Модели Крипке, описывающие поведение левой и правой задержек:

Синхронная композиция этих моделей:



Особенности моделирования систем

Моделирование параллелизма

Асинхронное исполнение характерно для систем без встроенных средств синхронизации компонентов, в том числе (*с «примесью» синхронности*) для программных систем

Переходы асинхронной композиции моделей (*без взаимодействия компонентов*) определяются так:

$$(s_1, s_1') \rightsquigarrow (s_2, s_2') \quad \Leftrightarrow \quad (s_1 \to s_2 \text{ и } s_1' = s_2') \text{ или } (s_1 = s_2 \text{ и } s_1' \mapsto s_2')$$

Особенности моделирования систем

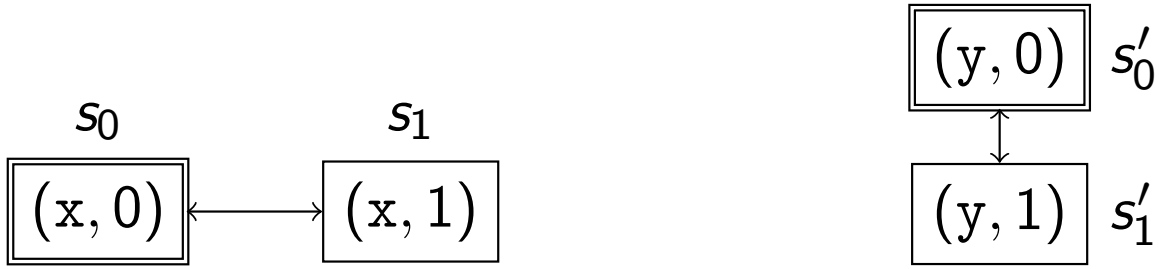
Моделирование параллелизма

Для примера рассмотрим две параллельно работающие программы, в цикле выполняющие одно присваивание:

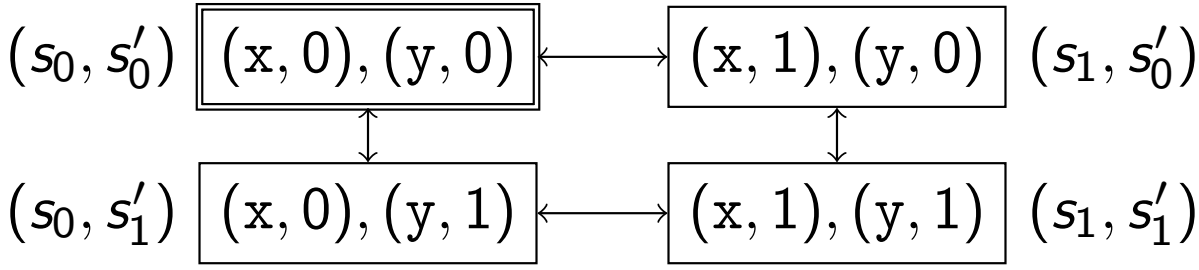
$$\pi_1 : \mathrm{x} := \mathrm{x} + 1; \qquad \pi_2 : \mathrm{y} := \mathrm{y} + 1;$$

Для простоты будем считать, что эти программы выполняются в условиях однобитовой арифметики с переполнением

Модели Крипке для этих программ устроены так:



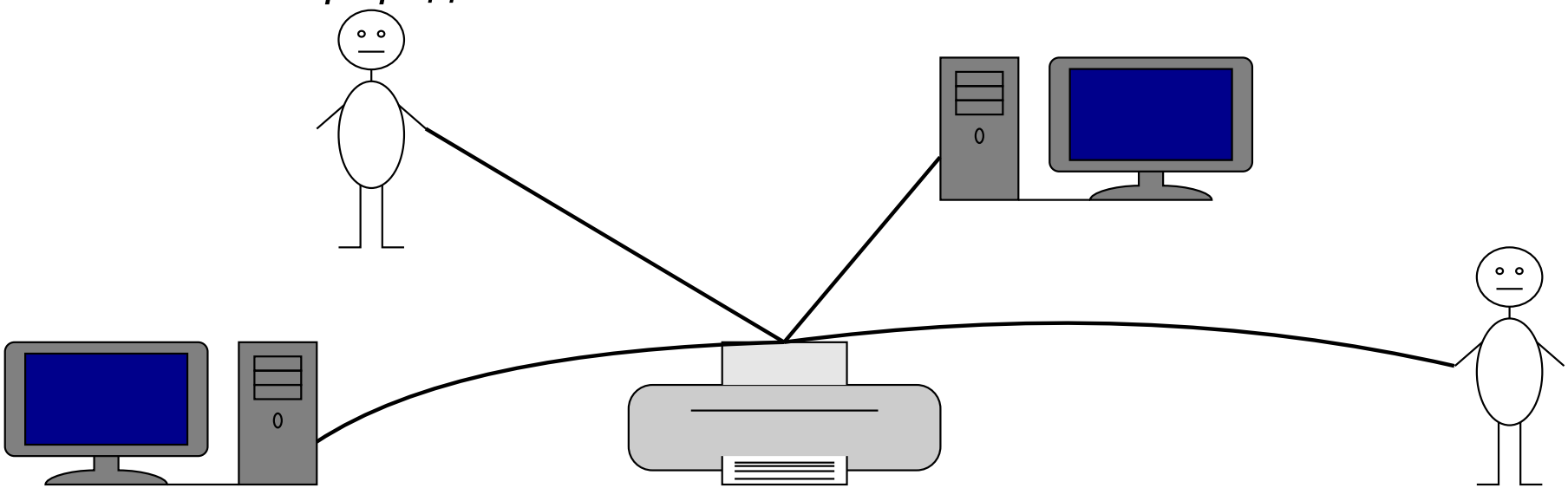
Асинхронная композиция этих моделей:



Особенности моделирования систем

Моделирование взаимодействия

Пример: с сетевым принтером пытаются взаимодействовать участники *неизвестной природы*



Принтер работает последовательно: принимает информацию и производит печать согласно содержащейся в нём *программе*

Программы остальных участников, *если они есть*, неизвестны

Особенности моделирования систем

Моделирование взаимодействия

Предположим, что в контроллере принтера есть однобитовый регистр $\mathtt{R}$, доступный на чтение и запись всем желающим послать запрос на печать:

$$\mathtt{R} = \mathbb{t} \Leftrightarrow \text{принтер свободен для печати}$$

Тогда программу π, посредством которой можно организовать взаимодействие участника с принтером, можно устроить так:

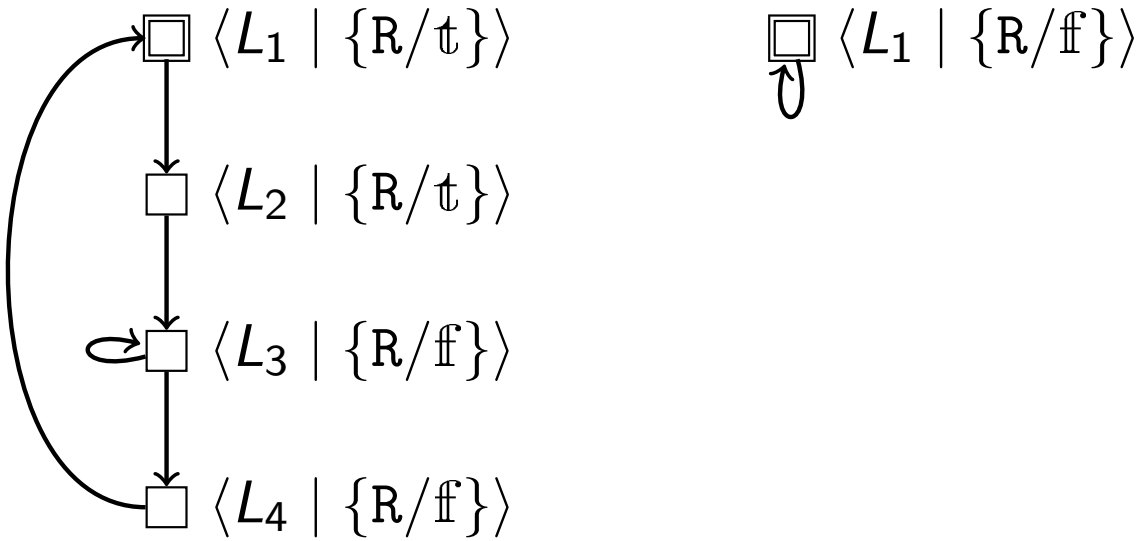
while $\mathbb{t}$ **do**
  $L1:$ **while** $\neg\mathtt{R}$ **do** $\emptyset$ **od**
  $L2:$ $\mathtt{R} := \mathbb{f}$;
  $L3:$ послать данные для печати
  $L4:$ $\mathtt{R} := \mathbb{t}$;
od

Особенности моделирования систем

Моделирование взаимодействия

Модель Крипке для π:

(*функция разметки опущена*)



Особенности моделирования систем

Моделирование взаимодействия

Программа в вычислительной системе может взаимодействовать с другими программами: общие переменные, обмен сообщениями, сигналы, ...

Такое взаимодействие выражается в том, что состояние вычисления программы может измениться под воздействием её **окружения**

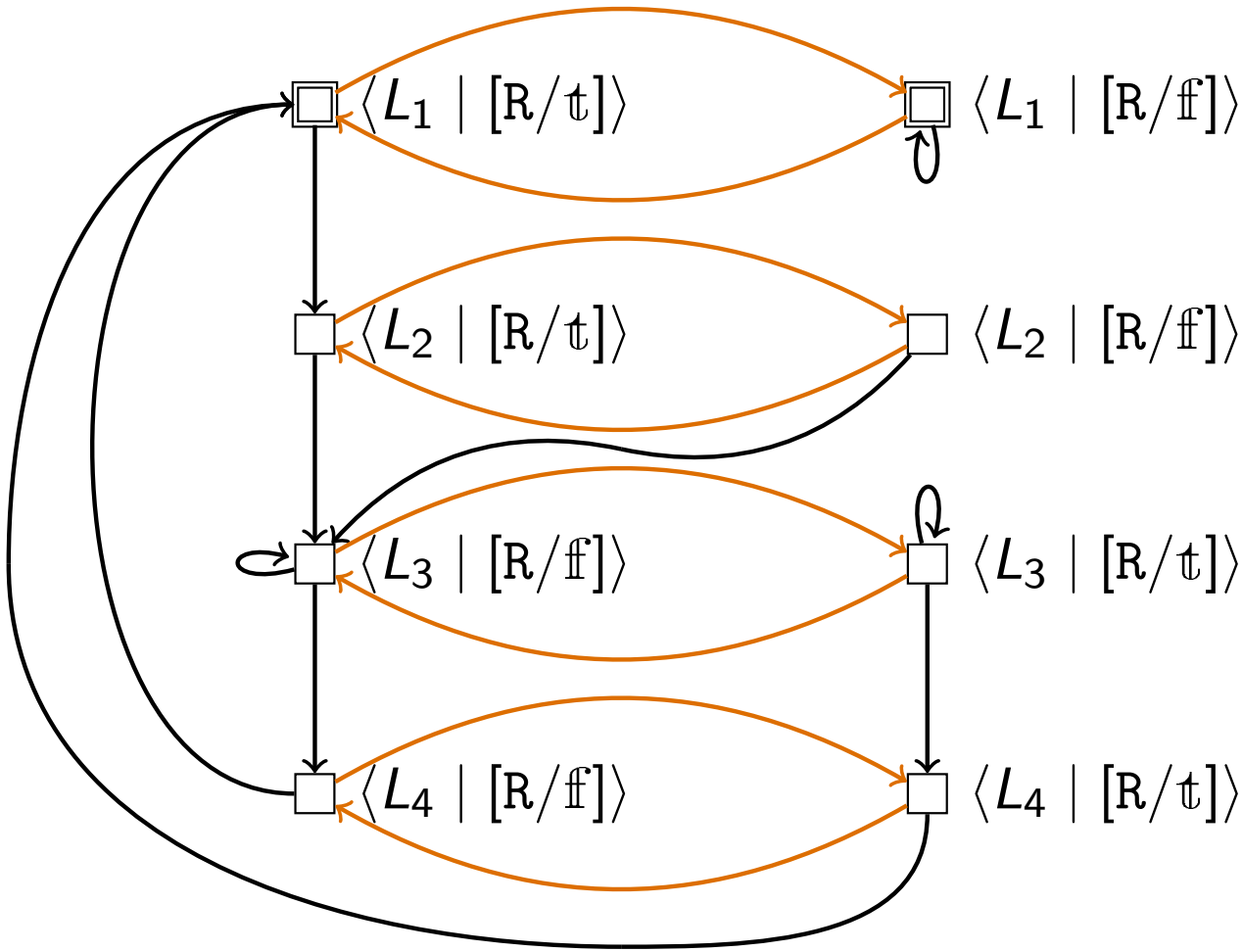
Например, регистр `R` в примере может быть изменён любым участником

Чтобы учесть такое изменение, следует добавить в модель Крипке переходы, отвечающие всем возможностям окружения повлиять на состояние вычисления программы

Особенности моделирования систем

Моделирование взаимодействия

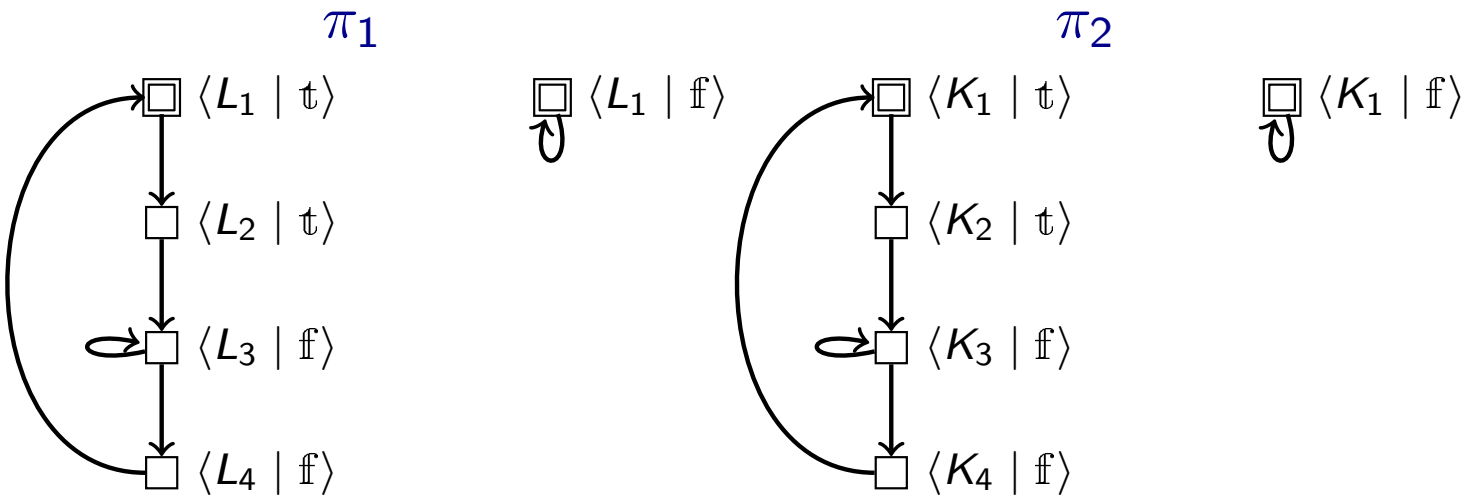
Модель Крипке для программы π с окружением, способным произвольно переключать значение регистра $\mathtt{R}$:



Особенности моделирования систем

Моделирование взаимодействия

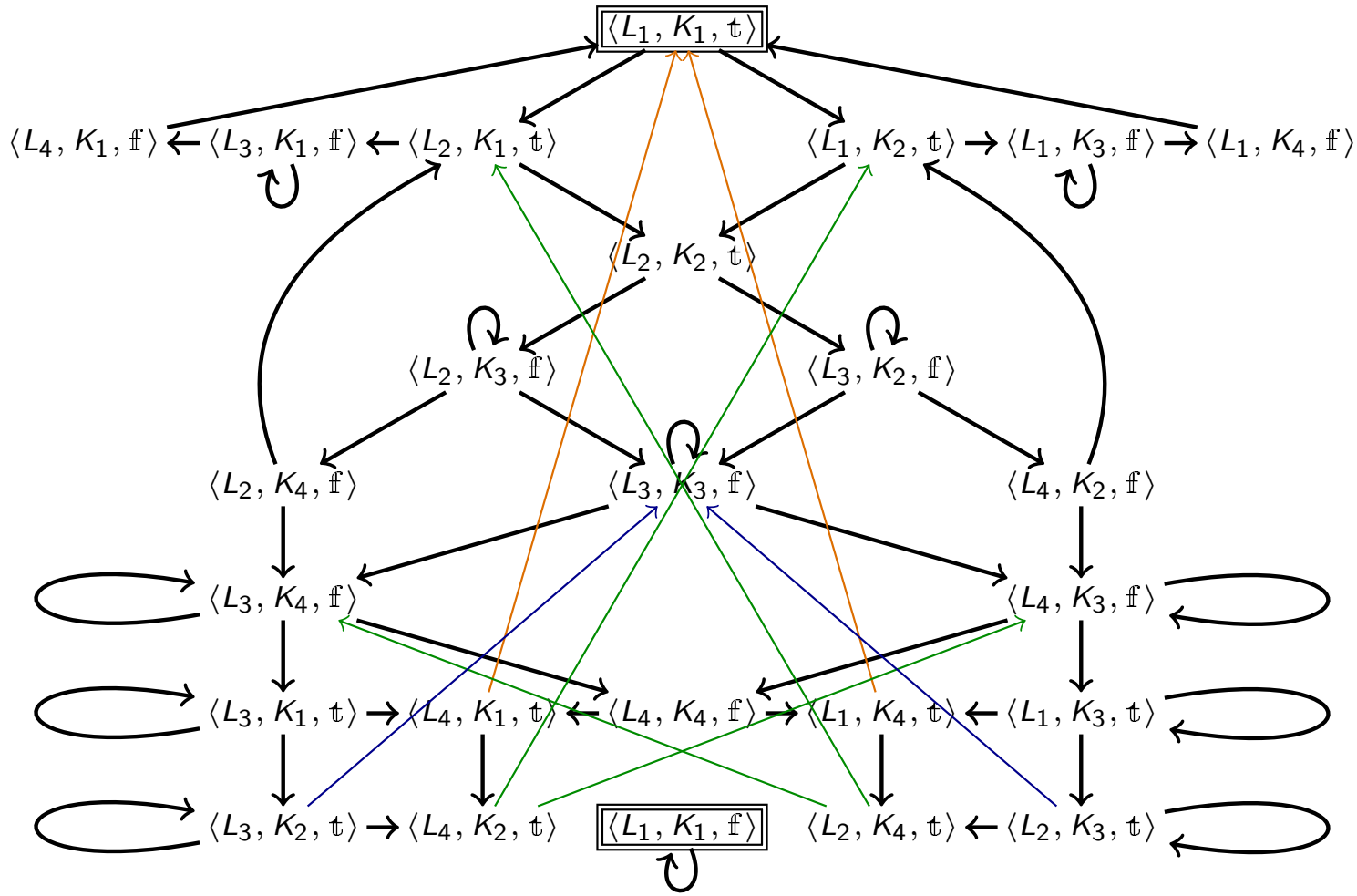
Рассмотрим две (одинаковые) программы взаимодействия с сетевым принтером, выполняющиеся согласно следующим моделям Крипке:



Особенности моделирования систем

Моделирование взаимодействия

Модель Крипке, описывающая взаимодействие π_1, π_2 согласно семантике чередующихся вычислений с общим регистром $\mathtt{R}$, выглядит так:



Особенности моделирования систем

Гранулярность и атомарность в моделях

При моделировании параллельных систем большую роль играет гранулярность переходов, то есть степень их детализации

Переход должен соответствовать атомарному действию:

- такому, в выполнение которого не может вмешаться другое действие
- не имеющему промежуточных наблюдаемых состояний
- не подразбивающемуся на более простые действия

Если детализация переходов будет слишком мала (переходы слишком «крупны»), то в модели могут отсутствовать некоторые ошибки, наблюдающиеся при частичном выполнении и «перекрытии» действий

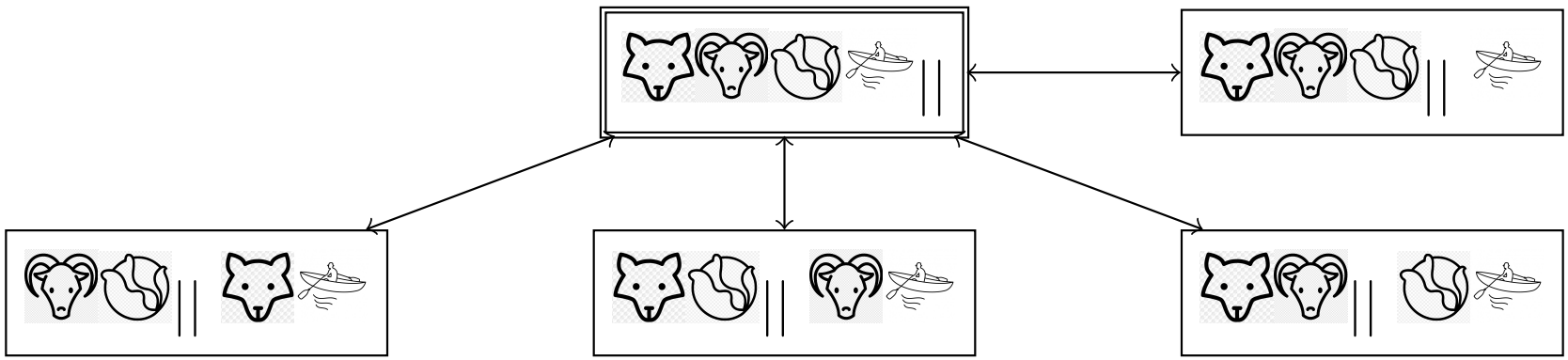
Если же детализация переходов будет слишком велика, то это может

- существенно увеличить размер модели и снизить эффективность её верификации и
- добавить в композицию такие состояния, которых не бывает в реальной системе

Особенности моделирования систем

Гранулярность и атомарность в моделях

Например,



Нужно ли рассматривать отдельное действие «плавание по реке»?

А «посадка в лодку» и «высадка из лодки»?

Можно ли в качестве атомарного выбрать действие плавания туда и обратно?

Особенности моделирования систем

Гранулярность и атомарность в моделях

Другой пример

Рассмотрим две параллельно выполняющиеся программы, каждая из которых выполняет одну команду

$$\pi_1 : \mathtt{x} := \mathtt{x} + \mathtt{y}; \qquad\qquad \pi_2 : \mathtt{y} := \mathtt{x} + \mathtt{y};$$

Устроит ли нас, если эти две команды будут считаться атомарными?

Из оценки данных $\{\mathtt{x}/2, \mathtt{y}/3\}$ в вычислениях можно достичь только оценок $\{\mathtt{x}/5, \mathtt{y}/3\}$, $\{\mathtt{x}/5, \mathtt{y}/8\}$, $\{\mathtt{x}/2, \mathtt{y}/5\}$ и $\{\mathtt{x}/7, \mathtt{y}/5\}$

Реализация этих команд на языке ассемблера может содержать и более одной команды:

```
load $1, x          load $3, x
load $2, y          load $4, y
add $1, $2          add $3, $4
store $1, x         store $3, y
```

Если атомарными считать ассемблерные команды, то достижимы и другие оценки — например, $\{\mathtt{x}/5, \mathtt{y}/5\}$, и такой результат может быть и нежелательным