Математическая логика

(mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы $\rightarrow$ Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 11

Выразимость в теориях и интерпретациях

Арифметика Пресбургера
(определение, разрешимость,
полнота, выразительные возможности)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

Вступление

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

В теоремах формальной арифметики можно **явно** использовать только символы $\mathbf{0}$, $+$, $\times$, $\mathbf{s}$ и $=$ и логические операции

При этом в формулировке теорем могут **неявно** появляться и другие осмысленные понятия — **например:**

- число $\mathbf{1}$: $\quad \mathbf{1} = \mathbf{s}(\mathbf{0})$
- число $\mathbf{n}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$: $\quad \mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{s}(\mathbf{s}(\ldots\mathbf{s}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$
- операция возведения в квадрат: $\quad \mathrm{x}^{\mathbf{2}} = \mathrm{x} \times \mathrm{x}$
- отношение нестрогого неравенства: $\quad \mathrm{x} \geq \mathrm{y} \Leftrightarrow \exists \mathrm{z}\, (\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z})$

Попробуем строго определить и исследовать возможности неявного использования понятий в теориях

Выразимость в теориях и интерпретациях

Сигнатурными символами будем называть константы, функциональные символы и предикатные символы

Рассмотрим сигнатуру σ, содержащую сигнатурный символ s

$\sigma_{-\mathrm{s}}$ — сигнатура, получающаяся из σ удалением символа s

$\sigma'_{+\mathrm{s}} = \sigma$, если $\sigma' = \sigma_{-\mathrm{s}}$

Определение сигнатурного символа s в сигнатуре $\sigma_{-\mathrm{s}}$ — это формула сигнатуры $\sigma_{-\mathrm{s}}$ вида

- $\varphi(\mathrm{y})$, если s — константа
- $\varphi(\mathrm{y}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, если s — функциональный символ местности n
- $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, если s — предикатный символ местности n

Выразимость в теориях и интерпретациях

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{I} = \left\langle \mathsf{D}, \overline{\mathsf{Const}}, \overline{\mathsf{Func}}, \overline{\mathsf{Pred}} \right\rangle$ сигнатуры σ, предмет $c \in \mathsf{D}$, операцию $f : \mathsf{D}^n \to \mathsf{D}$ и отношение $P : \mathsf{D}^n \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$

Определение предмета c в $\mathcal{I}$ — это определение $\varphi(\mathrm{y})$ константы **c**, не входящей в σ, такое что

$$\mathcal{I} \models \varphi[d] \Leftrightarrow d = c$$

Определение операции f в $\mathcal{I}$ — это определение $\varphi(\mathrm{y}, \widetilde{\mathrm{x}^n})$ функционального символа **f**, не входящего в σ, такое что

$$\mathcal{I} \models \varphi[d, \widetilde{d^n}] \Leftrightarrow f(\widetilde{d^n}) = d$$

Определение отношения P в $\mathcal{I}$ — это определение $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^n})$ предикатного символа P, не входящего в σ, такое что

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d^n}] \Leftrightarrow P(\widetilde{d^n}) = \mathbf{t}$$

Предмет (операция, отношение) ξ интерпретации $\mathcal{I}$ выразим (выразима, выразимо) в $\mathcal{I}$, если существует определение ξ в $\mathcal{I}$

Выразимость в теориях и интерпретациях

Примеры определений в арифметической интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$:

- определение числа 2:
$$y = s(s(\mathbf{0}))$$
- определение операции возведения в квадрат $(\cdot^2)$:
$$y = x_1 \times x_1$$
- определение отношения нестрогого неравенства $(\geq)$:
$$\exists z\,(x_1 = x_1 + z)$$

Наличие таких определений означает, что число 2, операция $\cdot^2$ и отношение $\geq$ **выразимы** в арифметической интерпретации

Замечание: более точное название таких определений — **явные определения**:

$$s \text{ есть } \varphi, \text{ где } \varphi \text{ — определение, не использующее } s$$

Выразимость в теориях и интерпретациях

Определяющая аксиома для сигнатурного символа s и определения φ символа s — это формула $A[\mathrm{s},\varphi]$ вида

- $\varphi\{\mathrm{y}/\mathrm{s}\}$, если s — константа
- $\forall\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ (\varphi\{\mathrm{y}/\mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})\})$, если s — функциональный символ местности n
- $(\mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}) \leftrightarrow \varphi)$, если s — предикатный символ местности n

Определяющая аксиома для предмета (операции, отношения) ξ в интерпретации $\mathcal{I}$ сигнатуры $\sigma_{-\mathrm{s}}$ и константы (функционального символа, предикатного символа) s — это аксиома $A[\mathrm{s},\varphi]$, где φ — определение ξ в $\mathcal{I}$

Примеры аксиом, определяющих в интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$

- число 2: $\quad \mathbf{2} = \mathrm{s}(\mathrm{s}(\mathbf{0}))$
- операцию возведения в квадрат $(\cdot^2)$: $\quad \forall\mathtt{x}_1\ (\mathtt{x}_1{}^2 = \mathtt{x}_1 \times \mathtt{x}_1)$
- отношение нестрогого неравенства $(\geq)$:
$$(\mathtt{x}_1 \geq \mathtt{x}_2) \leftrightarrow \exists\mathtt{z}\ (\mathtt{x}_1 = \mathtt{x}_2 + \mathtt{z})$$

Выразимость в теориях и интерпретациях

Расширение теории $\mathcal{T}$ сигнатуры σ сигнатурным символом s согласно определению φ — это теория $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi} = \mathcal{T} \cup \{A[\mathrm{s}, \varphi]\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$

$\mathcal{I}^{+\mathrm{s}/\xi}$ — интерпретация, получающаяся из интерпретации $\mathcal{I}$ добавлением символа s в сигнатуру и добавлением оценки ξ символа s

$\mathcal{I}^{-\mathrm{s}}$ — это интерпретация, получаемая из $\mathcal{I}$ удалением символа s из сигнатуры и удалением оценки символа s

Выразимость в теориях и интерпретациях

Теорема(*о расширении теории*). Пусть $\mathcal{T}$ — теория сигнатуры σ, и φ — определение сигнатурного символа s в сигнатуре σ. Тогда:

1. **Если $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$, то $\mathcal{I}^{-\mathrm{s}}$ — модель теории $\mathcal{T}$**
2. **Если $\mathcal{J}$ — модель теории $\mathcal{T}$ и φ — определение предмета, операции или отношения ξ в $\mathcal{I}$, то $\mathcal{J}^{+\mathrm{s}/\xi}$ — модель теории $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$**

Доказательство.

1: Пусть $\mathcal{I} \models \mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$

Так как $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$, верно и $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$

Так как в формулах множества $\mathcal{T}$ не содержится символа s, верно и $\mathcal{I}^{-\mathrm{s}} \models \mathcal{T}$

2: Пусть $\mathcal{J} \models \mathcal{T}$

Тогда и $\mathcal{J}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \mathcal{T}$, и достаточно показать, что $\mathcal{J}^{+\mathrm{s}/\xi} \models A[\mathrm{s}, \varphi]$

Выразимость в теориях и интерпретациях

Теорема(*о расширении теории*). Пусть $\mathcal{T}$ — теория сигнатуры σ, и φ — определение сигнатурного символа s в сигнатуре σ. Тогда:

1. **Если $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$, то $\mathcal{I}^{-\mathrm{s}}$ — модель теории $\mathcal{T}$**
2. **Если $\mathcal{J}$ — модель теории $\mathcal{T}$ и φ — определение предмета, операции или отношения ξ в $\mathcal{I}$, то $\mathcal{J}^{+\mathrm{s}/\xi}$ — модель теории $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$**

Доказательство (*2*). $\mathcal{J}^{+\mathrm{s}/\xi} \models A[\mathrm{s}, \varphi]$?

Подробно разберём только один случай: s — функциональный символ местности n

Для любых предметов $\widetilde{d^n}$ интерпретации $\mathcal{J}$ справедливо $\mathcal{J} \models \varphi[\xi(\widetilde{d^n}), \widetilde{d^n}]$, а значит, и $\mathcal{J}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \varphi\,\{\mathrm{y}/\mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{x}^\mathrm{n}})\}\,[\widetilde{d^n}]$

Следовательно, $\mathcal{J}^{+\mathrm{s}/\xi} \models \forall\widetilde{\mathrm{x}^\mathrm{n}}\,(\varphi\,\{\mathrm{y}/\mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{x}^\mathrm{n}})\})$

Последняя формула — это в точности $A[\mathrm{s}, \varphi]$ ▼

Выразимость в теориях и интерпретациях

Формулы φ и ψ равносильны в теории $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$-равносильны), если

$$\models_{\mathcal{T}} \varphi \leftrightarrow \psi$$

Утверждение. Любая формула, $\mathcal{T}$-равносильная теореме теории $\mathcal{T}$, является теоремой теории $\mathcal{T}$

Доказательство.

Пусть φ — теорема, и формула ψ $\mathcal{T}$-равносильна формуле φ

Тогда $\mathcal{T} \models \varphi$ и $\mathcal{T} \models \varphi \to \psi$, а значит, $\mathcal{T} \models \psi$ ▼

Утверждение. Для любой теории $\mathcal{T}$ и любых $\mathcal{T}$-равносильных формул ψ, χ формулы $\varphi\,[\![\psi]\!]$ и $\varphi\,[\![\psi/\chi]\!]$ $\mathcal{T}$-равносильны

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы о равносильной замене в лекции 6

Выразимость в теориях и интерпретациях

Теорема(*о подстановке определения*). Пусть $\mathcal{T}$ — теория, s — сигнатурный символ и φ — определение этого символа. Тогда для любой формулы ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ существует $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$-равносильная формула сигнатуры σ

Доказательство.

Случай 1: s — предикатный символ

Тогда формулы $\mathrm{s}(t_1, \ldots, t_n)$ и $\varphi\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$-равносильны

Значит, $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$-равносильными будут произвольная формула ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ и формула, получающаяся из ψ заменой всех атомов вида $\mathrm{s}(t_1, \ldots, t_n)$ на соответствующие формулы $\varphi\{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$

Выразимость в теориях и интерпретациях

Теорема(*о подстановке определения*). **Пусть $\mathcal{T}$ — теория, s — сигнатурный символ и φ — определение этого символа. Тогда для любой формулы ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ существует $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$-равносильная формула сигнатуры σ**

Доказательство.

Случай 2: s — функциональный символ

Раз за разом, пока это возможно, будем делать следующее

Выберем произвольное вхождение символа s в формулу ψ (для определённости — в атом A)

Заменим терм $\mathrm{s}(t_1, \ldots, t_n)$ с выбранным вхождением на "свежую" переменную $\mathtt{z}$, и получившийся атом B — на формулу $\exists \mathtt{z}\, (\varphi\, \{\mathrm{y}/\mathtt{z}, \mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/t_n\} \,\&\, \mathrm{B})$

Исходный атом A и итоговая формула $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$-равносильны, а значит, $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$-равносильны формулы до и после замен, произведённых на каждом шаге

Выразимость в теориях и интерпретациях

Теорема(*о подстановке определения*). **Пусть $\mathcal{T}$ — теория, s — сигнатурный символ и φ — определение этого символа. Тогда для любой формулы ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ существует $\mathcal{T}^{+\mathrm{s}/\varphi}$-равносильная формула сигнатуры σ**

Доказательство.

Случай 3: s — константа — аналогичен случаю 2

▼

Выразимость в теориях и интерпретациях

- *Теорема о расширении теории* говорит, что если **явно** и *корректно* определить предмет, операцию или отношение и добавить к списку рассматриваемых понятий, то допустимые модели предсказуемо уточнятся согласно определению
- *Теорема о подстановке определения* говорит, что **явно** определённое понятие всегда можно заменить на его определение, никак не изменив смысла утверждения в теории

Итог. любая теория неявно содержит все *выразимые* понятия (предметы, операции, отношения): их можно использовать при формулировании и доказательстве теорем

Выразимость в теориях и интерпретациях

Например, в арифметической интерпретации выразимы (*то есть она неявно содержит*):

- любое натуральное число **n**:
$$y = \underbrace{\mathbf{s}(\mathbf{s}(\ldots\mathbf{s}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$
- свойство $\mathrm{div}(x_1, x_2)$ “x_1 является делителем x_2”:
$$\exists z\ (x_2 = x_1 \times z)$$
- операция вычисления наибольшего общего делителя:
$$\mathrm{div}(y, x_1)\ \&\ \mathrm{div}(y, x_2)\ \&\ \forall u\ (\mathrm{div}(u, x_1)\ \&\ \mathrm{div}(u, x_2) \to \mathrm{div}(u, y))$$
- свойство even чётности чисел:
$$\exists y\ (x_1 = y \times \mathbf{2})$$
- свойство prime простоты чисел:
$$\forall y\ \forall z\ (x_1 = y \times z \to y = \mathbf{1} \vee z = \mathbf{1})$$
- свойство согласованности числа с гипотезой Гольдбаха:
$$\mathrm{even}(x)\ \&\ x \geq \mathbf{4} \to \exists y\ \exists z\ (\mathrm{prime}(y)\ \&\ \mathrm{prime}(z)\ \&\ x = y + z)$$

Арифметика Пресбургера

Попробуем найти фрагмент арифметики менее выразительный и более простой для анализа, чем рассмотренный

Исключим из σ_{ar} умножение:

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \left\{+^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}\right\}, \left\{=^{(2)}\right\} \right\rangle$$

$\mathcal{I}_{pa} = \mathcal{I}_{ar}^{-\times}$ — теперь арифметической будем называть эту интерпретацию

Каковы выразительные возможности такого фрагмента арифметики?

Можно ли предоставить "хорошую" систему аксиом, адекватную интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$?

Так как ответы на эти вопросы давно известны, начнём непосредственно с системы аксиом

Арифметика Пресбургера

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметика Пресбургера — это теория $\mathcal{T}_{pa}$ сигнатуры σ_{pa}, состоящая из следующих аксиом:

- $A_{+\mathbf{0}}$: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} + \mathbf{0} = \mathrm{x})$
- $A_{+\mathbf{s}}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{x} + \mathbf{s}(\mathrm{y}) = \mathbf{s}(\mathrm{x} + \mathrm{y}))$
- $A_{r=}$: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{x})$
- $A_{s=}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathrm{y} = \mathrm{x}))$
- $A_{t=}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y})\,\&(\mathrm{y} = \mathrm{z}) \to (\mathrm{x} = \mathrm{z}))$
- $A_{=+\mathbf{s}}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathbf{s}(\mathrm{x}) = \mathbf{s}(\mathrm{y})))$
- $A_{=-\mathbf{s}}$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathbf{s}(\mathrm{x}) = \mathbf{s}(\mathrm{y})) \to (\mathrm{x} = \mathrm{y}))$
- A_0: $\forall \mathrm{x}\ \neg(\mathbf{0} = \mathbf{s}(\mathrm{x}))$
- все аксиомы вида A_{ind}: $\varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{0}\}\,\&\,\forall \mathrm{x}\ (\varphi \to \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{s}(\mathrm{x})\}) \to \forall \mathrm{x}\ \varphi$, где $\varphi = \varphi(\mathrm{x})$

Утверждение. $\mathcal{I}_{pa} \models \mathcal{T}_{pa}$

Доказательство. Очевидно?

Теорема о разрешимости арифметики Пресбургера

Теория $\mathcal{T}_{pa}$ разрешима

Доказательство.

Заметим, что в арифметической интерпретации выразимы:

- число α: $\underbrace{\mathbf{s}(\mathbf{s}(\ldots\mathbf{s}}_{\alpha \text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$
- умножение на число β: $\mathtt{y} = \underbrace{\mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_1 + \cdots + \mathtt{x}_1}_{\beta \text{ раз}}$
- отношение $\mathtt{x}_1 > \mathtt{x}_2$: $\exists \mathtt{x}\ (\alpha = \beta + \mathtt{x}\ \&\ \neg(\mathtt{x} = \mathbf{0}))$
- отношение $\mathtt{x}_1 \equiv_\alpha \mathtt{x}_2$: $\exists \mathtt{x}\ (\mathtt{x}_1 + \alpha\mathtt{x} = \mathtt{x}_2) \vee \exists \mathtt{x}\ (\mathtt{x}_2 + \alpha\mathtt{x} = \mathtt{x}_1)$
- дополнения отношений $>$, $\equiv_\alpha$, $=$

Согласно *теореме о подстановке определения*, достаточно показать, что теория $\mathcal{T}_{pa}$, *расширенная* перечисленными символами согласно приведённым определениям, разрешима

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Рефлексивность равенства: $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Симметричность равенства и аксиома $\forall \mathrm{x}\ \neg(\mathbf{0} = \mathbf{s}(\mathrm{x}))$: $\qquad (\alpha \in \mathbb{N}_0)$

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{s}(\alpha) \neq \mathbf{0} \text{ и } \models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} \neq \mathbf{s}(\alpha)$$

Аксиомы равенства и $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathbf{s}(\mathrm{x}) = \mathbf{s}(\mathrm{y}) \to \mathrm{x} = \mathrm{y})$: $\qquad (\beta \in \mathbb{N}_0)$

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{s}(\alpha) = \mathbf{s}(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \beta$$

Непротиворечивость теории:

$$\not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} \neq \mathbf{0},\ \not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{s}(\alpha) = \mathbf{0} \text{ и } \not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{s}(\alpha)$$

Значит, $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \alpha = \beta$

Аналогично (*хотя и технически сложнее*) можно показать, что

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \alpha > \beta$$
$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha \equiv_{\gamma} \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \alpha \equiv_{\gamma} \beta$$

Бескванторная формула — это формула, не содержащая кванторов

Итог: для любого бескванторного предложения φ верно

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \varphi$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Покажем, как проверить $\mathcal{T}_{pa}$-общезначимость **произвольной** формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Шаг 1: перейти к предложению ψ: $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi$

$$\left(\textit{очевидно}, \models_{\mathcal{T}_{pa}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi\right)$$

Шаг 2: преобразовать ψ в **бескванторное** предложение χ, такое что $\qquad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \chi$

Шаг 3: общезначимость предложения χ проверяется легко: χ — это формульная запись совокупности систем линейных уравнений над целыми числами, и общезначимость χ равносильна **не**существованию набора чисел, **не** являющихся решением

Осталось показать, как преобразуется формула на *шаге 2*

На некоторое время забудем о теории $\mathcal{T}_{pa}$:

$$\cancel{\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi \Leftrightarrow \models_{\mathcal{T}_{pa}} \chi}$$
$$\mathcal{I}_{pa} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}_{pa} \models \chi$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Каждый шаг преобразования состоит из нескольких этапов:

- заменим все кванторы $\forall$ на $\exists$: $\forall \mathrm{x}\ \varphi \approx \neg\exists \mathrm{x}\ \neg\varphi$
- рассмотрим подформулу $\exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$,
  где φ — бесквaнторная формула
- преобразуем φ в *ДНФ*, используя *законы булевой алгебры*
- вынесем за квантор $\exists \mathrm{x}$ слагаемые, не содержащие x:
  $$\exists \mathrm{x}\ (\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \vee \psi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})) \approx \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \vee \exists \mathrm{x}\ \psi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$$
- перенесём квантор $\exists \mathrm{x}$ под каждое слагаемое:
  $$\exists \mathrm{x}\ (K_1 \vee \dots \vee K_n) \approx \exists \mathrm{x}\ K_1 \vee \dots \vee \exists \mathrm{x}\ K_n$$
- каждую формулу $\exists \mathrm{x}\ K_i$ преобразуем в бесквaнторную с сохранением её значения в $\mathcal{I}_{pa}$

Формула $K_i(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ трактуется в $\mathcal{I}_{pa}$ как

система (не)равенств над $\mathbb{N}_0$

Покажем, как исключить x из произвольной системы с сохранением проекции множества решений на $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Каждое (не)равенство системы можно привести к одной из следующих форм: (t_1, t_2 *не зависят от* x)

$$\begin{array}{llll} \alpha\mathrm{x} + t_1 = t_2 & \alpha\mathrm{x} + t_1 < t_2 & \alpha\mathrm{x} + t_1 \leq t_2 & \alpha\mathrm{x} + t_1 \equiv_\beta t_2 \\ \alpha\mathrm{x} + t_1 \neq t_2 & \alpha\mathrm{x} + t_1 > t_2 & \alpha\mathrm{x} + t_1 \geq t_2 & \alpha\mathrm{x} + t_1 \not\equiv_\beta t_2 \end{array}$$

$$A \not\equiv_\beta B \iff \left[\begin{array}{l} A \equiv_\beta B + 1 \\ A \equiv_\beta B + 2 \\ \ldots \\ A \equiv_\beta B + (\beta - 1) \end{array}\right. \qquad A \geq B \iff \left[\begin{array}{l} A = B \\ A > B \end{array}\right.$$

$$A \neq B \iff \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < B \end{array}\right. \qquad A \leq B \iff \left[\begin{array}{l} A = B \\ A < B \end{array}\right.$$

Значит, достаточно рассмотреть системы только над такими (не)равенствами:

$$\begin{array}{ll} \alpha\mathrm{x} + t_1 = t_2 & \alpha\mathrm{x} + t_1 < t_2 \\ \alpha\mathrm{x} + t_1 \equiv_\beta t_2 & \alpha\mathrm{x} + t_1 > t_2 \end{array}$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Если система содержит хотя бы одно равенство $=$, то исключить $\mathtt{x}$ можно так:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ S(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \end{cases} \Leftrightarrow_{(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})} \begin{cases} t_1 \equiv_\alpha t_2 \\ t_2 \geq t_1 \\ S(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \gtrless t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \gtrless \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha\beta\mathtt{x} + \alpha t_3 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 \\ \dots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{cases}$$

Пусть теперь система не содержит равенств $=$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Во всех строгих неравенствах системы можно получить одинаковые левые части:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 \gtrless_1 t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \gtrless_2 t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta\mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless_1 \beta t_2 + \alpha t_3 \\ \alpha\beta\mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless_2 \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{cases}$$

Если система содержит много строгих неравенств (*в одну сторону*) с одинаковыми левыми частями, то можно исключить $\mathtt{x}$ из всех неравенств, кроме одного:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t \gtrless t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t \gtrless t_2 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t \gtrless t_1 \\ t_1 \underset{<}{\overset{>}{=}} t_2 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t \gtrless t_2 \\ t_2 \gtrless t_1 \end{cases} \end{array} \right. \\ \dots \end{cases}$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Равенства по модулю разных чисел можно привести к равенствам по модулю одного числа:

$$\begin{cases} \alpha \mathrm{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ \beta \mathrm{x} + t_3 \equiv_\delta t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\delta \mathrm{x} + \delta t_1 \equiv_{\gamma\delta} \delta t_2 \\ \beta\gamma \mathrm{x} + \gamma t_3 \equiv_{\gamma\delta} \gamma t_4 \\ \dots \end{cases}$$

Итог: осталось показать, как исключить $\mathtt{x}$ из системы, содержащей

- не более одного неравенства $\alpha \mathrm{x} + t > t_1$,
- не более одного неравенства $\alpha \mathrm{x} + t < t_2$ с той же левой частью и
- произвольное число равенств $\beta_i \mathrm{x} + t_3^i \equiv_\gamma t_4^i$ по одинаковому модулю γ

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Как исключить $\mathtt{x}$ из неравенства $>$:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t > t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t < t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases}$$

Если $t > t_1$, то неравенство выполнено

Для **каждого** решения системы, такого что $t \leq t_1$, найдётся решение, отличающееся только значением $\mathtt{x}$:

$$\alpha\mathtt{x} + t \in \{t_1 + 1, \dots, t_1 + \alpha\gamma\}$$

Значит, неравенство $\alpha\mathtt{x} + t > t_1$ можно заменить на совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t > t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t = t_1 + 1 \\ \alpha\mathtt{x} + t = t_1 + 2 \\ \dots \\ \alpha\mathtt{x} + t = t_1 + \alpha\gamma \end{array}\right.$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Как исключить $\mathtt{x}$ из $<$ и $\equiv_\gamma$, когда он исключён из $>$:

$$\begin{cases} [\alpha\mathtt{x} + t < t_2] \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} [t < t_2] \\ t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \\ \begin{cases} [\alpha + t < t_2] \\ \beta + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} [\alpha(\gamma - 1) + t < t_2] \\ \beta(\gamma - 1) + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \end{array} \right.$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

И причём здесь теория $\mathcal{T}_{pa}$?

На каждом **элементарном шаге** преобразования формулы, записанного в виде *синтаксического* преобразования системы, получалась формула, $\mathcal{T}_{pa}$-равносильная исходной

Примеры таких элементарных шагов:

- перестановка слагаемых
- вынесение переменной $\mathtt{x}$ в каждой части
- добавление [вычитание] равных чисел к частям [из частей] (не)равенства
- умножение (не)равенства на число (для (не)равенства по модулю — с домножением основания на то же число)
- ...

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Вопрос на понимание:

А где и как в доказательстве применяется *схема математической индукции* A_{ind}?

Арифметика Пресбургера

Теорема(*о полноте арифметики Пресбургера*).
Арифметика Пресбургера полна

Теорема(*о выразительности арифметики Пресбургера*).
Отношение R выразимо в интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ тогда и только тогда, когда R является множеством решений какой-либо совокупности систем линейных (не)равенств $=$, $\neq$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\equiv_\alpha$, $\not\equiv_\alpha$ над неотрицательными целыми числами

Арифметика Пресбургера

Доказательство (теорем о полноте и выразительности).

Внимательно изучив *доказательство теоремы разрешимости*, можно убедиться, что

- каждую формулу $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ можно преобразовать в бескванторную формулу $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ над сигнатурой, расширенной всеми требуемыми (не)равенствами, имеющую тот же арифметический смысл
- формула $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ имеет в интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ смысл совокупности систем линейных (не)равенств над $\mathbb{N}_0$
- если φ — предложение, то ψ — бескванторное предложение, для которого верно либо $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, либо $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \neg\psi$ ▼