Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2017, весенний семестр

Лекция 11

Формальная арифметика

Явные логические определения

Теорема Гёделя о неполноте

Аксиомы равенства

Арифметика Пресбургера

Напоминание

Лекция 10 начиналась с такого примера:

выполняется ли предложение φ
в естественной арифметической интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$?

(*например,* φ : $\mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$,
или φ — ***произвольное*** *предложение логики предикатов*)

Если удастся построить теорию, адекватно описывающую интерпретацию $\mathcal{I}_{ar}$, то можно будет описывать (*и даже иногда решать*) арифметические задачи логическими методами

Попробуем выбрать небольшой, но при этом достаточно выразительный фрагмент арифметики, и построить для него адекватную теорию $\mathcal{T}_{ar}$

Остановимся на таком фрагменте:

арифметика целых неотрицательных чисел
со сложением, умножением и равенством

Формальная арифметика

Сигнатура формальной арифметики:

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметическая интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$ символов сигнатуры σ_{ar} задаётся так:

- предметная область: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\overline{\mathbf{0}} = 0, \quad \overline{\mathbf{S}}(d) = d + 1$
- $\overline{+}$, $\overline{\times}$, $\overline{=}$ — сложение, умножение и равенство чисел

Формальная арифметика — это любая теория,

более-менее *адекватно* описывающая интерпретацию $\mathcal{I}_{ar}$

Перед исследованием того, как такая теория может выглядеть, попробуем оценить, насколько выразителен выбранный фрагмент арифметики

Проверка соотношения $\mathcal{I}_{ar} \models \varphi$ — это обоснование/опровержение арифметического утверждения, записанного в виде формулы φ

Определимость

$$\sigma_{ar} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \times^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Некоторые арифметические понятия можно **явно** определить, используя только понятия сигнатуры σ_{ar}

Содержательные примеры:

- $\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$
- $\mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots \mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots)) \qquad (\mathbf{n} \in \mathbb{N})$
- $\mathrm{x}^2 = \mathrm{x} \times \mathrm{x}$
- $\mathrm{x} \geq \mathrm{y} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathrm{z}\,(\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z})$

Рассмотрим сигнатуру σ и содержащийся в ней символ s:
константу, функциональный символ или предикатный символ

$\sigma_{-\mathrm{s}}$ — это сигнатура, получаемая из σ удалением символа s
$\sigma'_{+\mathrm{s}} = \sigma$, если $\sigma' = \sigma_{-\mathrm{s}}$

Определимость

Определение константы[1] $\mathbf{c}$ (*в сигнатуре* $\sigma_{-\mathbf{c}}$) —

это формула вида $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{c}})$ (*сигнатуры* $\sigma_{-\mathbf{c}}$)

Определение функционального символа[1] $\mathbf{f}^{(n)}$ —

это формула вида $\varphi(\mathrm{x}_{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Определение предикатного символа[1] $\mathrm{P}^{(n)}$ —

это формула вида $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

Примеры определений в сигнатуре σ_{ar} для

- константы $\mathbf{1}$:

$$\mathrm{x}_{\mathbf{1}} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$

- функционального символа $\cdot^{2(1)}$:

$$\mathrm{x}_{\cdot 2} = \mathrm{x}_1 \times \mathrm{x}_1$$

- предикатного символа $\geq^{(2)}$:

$$\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 + \mathrm{y})$$

---

[1] Более точное название такого определения — явное определение:

“А — это Б (*не зависящее от А*)”

Определимость

Если $\varphi(\mathrm{x_c})$ — определение **c**, то аксиома $\varphi\{\mathrm{x_c}/\mathbf{c}\}$ определяет константу **c**

Если $\varphi(\mathrm{x_f}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — определение **f**, то аксиома $\forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\varphi\{\mathrm{x_f}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\})$ определяет функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$

Если $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — определение P, то аксиома $\forall\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\mathrm{P}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \leftrightarrow \varphi)$ определяет предикатный символ $\mathrm{P}^{(n)}$

Примеры аксиом, определяющих (*в сигнатуре* σ_{ar})

- константу $\mathbf{1}$:
$$\mathbf{1} = \mathbf{S}(\mathbf{0})$$
- функциональный символ $\cdot^{\mathbf{2}}$:
$$\forall \mathrm{x_1}\ (\mathrm{x_1}^2 = \mathrm{x_1} \times \mathrm{x_1})$$
- предикатный символ $\geq$:
$$\forall \mathrm{x_1}\ \forall \mathrm{x_2}\ (\mathrm{x_1} \geq \mathrm{x_2} \leftrightarrow \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x_1} = \mathrm{x_2} + \mathrm{y}))$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Сведём проблему $(\mathcal{T} \cup \{\varphi\})$-общезначимости формул сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ к проблеме $\mathcal{T}$-общезначимости формул сигнатуры σ

Покажем, как можно преобразовать формулу ψ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$ в формулу ψ' сигнатуры σ, такую что

$$\models_{\mathcal{T} \cup \{\varphi\}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}} \psi'$$

Для этого, в числе прочего, потребуется формула D,

- равносильная определению, используемому в аксиоме φ, и
- не содержащая связанных переменных, встречающихся в ψ

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение предикатного символа $\mathrm{s} = \mathrm{P}^{(n)}$

Каждый атом $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ заменяется на формулу

$$D\,\{\mathrm{x_1}/t_1, \ldots, \mathrm{x_n}/t_n\}$$

Например: $(D : \exists \mathrm{u}\ (\mathrm{x_1} = \mathrm{x_2} + \mathrm{u}))$

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} + \mathbf{1})^2 \geq \mathrm{y})$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{u}\ ((\mathrm{x} + \mathbf{1})^2 = \mathrm{y} + \mathrm{u})$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение константы $\mathrm{s} = \mathbf{c}$

Все вхождения константы **c** в формулу ψ заменяются на “свежую” переменную y, и полученная формула χ заменяется на

$$\forall \mathrm{y}\ (D\{\mathrm{x}_{\mathbf{c}}/\mathrm{y}\} \to \chi)$$

Например: $(D : \mathrm{x}_{\mathbf{1}} = \mathbf{S}(\mathbf{0}))$

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{u}\ ((\mathrm{x} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}} = \mathrm{y} + \mathrm{u})$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathrm{v}\ (\mathrm{v} = \mathbf{S}(\mathbf{0}) \to \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{u}\ ((\mathrm{x} + \mathrm{v})^{\mathbf{2}} = \mathrm{y} + \mathrm{u}))$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение функционального символа $\mathrm{s} = \mathbf{f}^{(n)}$

Пока это возможно,

- выбирается атом A с входящим в него термом $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$
- выбранный терм заменяется в атоме на "свежую" переменную y
- полученный атом A' заменяется на формулу
$$\forall \mathrm{y} \left(D \left\{ \mathrm{x}_{\mathbf{f}}/\mathrm{y}, \mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/t_n \right\} \to A' \right)$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории
Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

Устранение функционального символа $\mathrm{s} = \mathbf{f}^{(n)}$

Например: $\quad (D : \mathtt{x}_{\cdot 2} = \mathtt{x}_1 \times \mathtt{x}_1)$

$$\forall \mathtt{v}\ (\mathtt{v} = \mathbf{S}(\mathbf{0}) \to \forall \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \exists \mathtt{u}\ ((\mathtt{x} + \mathtt{v})^{\mathbf{2}} = \mathtt{y} + \mathtt{u}))$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall \mathtt{v}\ (\mathtt{v} = \mathbf{S}(\mathbf{0}) \to \forall \mathtt{x}\ \exists \mathtt{y}\ \exists \mathtt{u}\ \forall \mathtt{w}\ (\mathtt{w} = (\mathtt{x} + \mathtt{v}) \times (\mathtt{x} + \mathtt{v}) \to \mathtt{w} = \mathtt{y} + \mathtt{u}))$$

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Доказательство.

И что же осталось для обоснования теоремы?

Показать, что для **любой** формулы ψ до преобразования и соответствующей ей формулы ψ' после преобразования верно

$$\models_{\mathcal{T}\cup\{\varphi\}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}} \psi'$$

Можете попробовать доказать это самостоятельно ▼

Определимость

Теорема о разрешимости доопределения теории

Если теория $\mathcal{T}$ сигнатуры σ разрешима, то теория $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ сигнатуры $\sigma_{+\mathrm{s}}$, где φ — аксиома, определяющая символ s, также разрешима

Теперь можно по умолчанию считать, что помимо

маленького набора понятий, указанного в сигнатуре σ,

теорией описывается

намного **большиий** набор понятий s:

все те предметы, функции и отношения,

которые можно **явно** определить

на основе имеющихся в σ

Формальная арифметика

Примеры определений и предложений в сигнатуре σ_{ar}

- определение натурального числа **n**:

$$\mathrm{x}_{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\ldots\mathbf{S}}_{\mathbf{n}\text{ раз}}(\mathbf{0})\ldots))$$

- определение чётности числа ($\mathrm{Even}^{(1)}$):

$$\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \times \mathbf{2})$$

- определение простоты числа ($\mathrm{Prime}^{(1)}$):

$$\forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \times \mathrm{z} \to \mathrm{y} = \mathbf{1} \vee \mathrm{z} = \mathbf{1})$$

- гипотеза Гольдбаха:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{Even}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{x} \geq \mathbf{4} \to \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{z}\ (\mathrm{Prime}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{Prime}(\mathrm{z})\ \&\ \mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z}))$$

(*и это далеко не всё, на что способна формальная арифметика*)

Формальная арифметика

Чтобы была *хоть какая-нибудь* возможность анализировать истинность предложений в естественной интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ логическими методами, необходимо иметь теорию $\mathcal{T}_{ar}$, адекватно описывающую эту интерпретацию:

- $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}_{ar}$
- теория $\mathcal{T}_{ar}$ полна

Существует ли такая теория $\mathcal{T}_{ar}$?

Да, например, элементарная теория интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$

Но наличие такой теории **никак** не поможет в логическом анализе арифметических высказываний: чтобы описать элементарную теорию, необходимо решить проблему, для исследования которой эта теория описывается

А можно ли описать систему аксиом попроще и попонятнее?

Теорема Гёделя о неполноте

Любая рекурсивно перечислимая[1] теория в сигнатуре формальной арифметики, моделью которой является интерпретация $\mathcal{I}_{ar}$, неполна

Набросок доказательства

Докажем более простое утверждение:

любая *конечная* теория с моделью $\mathcal{I}_{ar}$ неполна

От противного предположим, что существует конечная полная теория $\mathcal{T}$, такая что $\mathcal{I}_{ar} \models \mathcal{T}$

Докажем, что в любой такой теории $\mathcal{T}$ необходимо присутствует парадокс лжеца:

существует предложение,
утверждающее, что это предложение ложно

---

[1] Существует алгоритм, перечисляющий аксиомы одну за одной; останавливаться алгоритм не обязан

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Предметы интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$ — целые неотрицательные числа, поэтому начнём доказательство с сопоставления каждой формуле такого числа[1]

Сопоставим натуральное число каждому символу алфавита сигнатуры σ_{ar}:

- $g(\mathbf{0}) = 1, \quad g(+) = 2, \quad g(\times) = 3, \quad g(=) = 4$
- $g(() = 5, \quad g(,) = 6, \quad g()) = 7$
- $g(\&) = 8, \quad g(\vee) = 9, \quad g(\rightarrow) = 10, \quad g(\neg) = 11,$
  $g(\forall) = 12, \quad g(\exists) = 13$
- $g(\mathtt{x}_1) = 14, \quad g(\mathtt{x}_2) = 15, \quad g(x_3) = 16, \quad \ldots$

---

[1] То есть с описания нумерации Гёделя

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Сопоставим формуле φ натуральное число (код формулы)

$$g(\varphi) = p_1^{g(\varphi[1])} \times p_2^{g(\varphi[2])} \times \cdots \times p_{|\varphi|}^{g(\varphi[|\varphi|])}$$

Здесь

- p_i — i-е простое число
- $\varphi[i]$ — i-й символ в записи формулы φ
- $|\varphi|$ — размер записи формулы φ

Утверждение

Существует алгоритм, проверяющий, является ли число i, $i \in \mathbb{N}_0$, кодом формулы

(*здесь и дальше "алгоритм" — это* ***машина Тьюринга***,
с алфавитом ленты $\{0, 1, \Lambda\}$,
работающая с двоичными кодами чисел)

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Используя тот же приём со степенями простых чисел, можно определить код

- конечной последовательности формул
- конечной семантической таблицы
- конечного табличного вывода

В теореме полноты табличного вывода был описан алгоритм построения успешного вывода $Tab(\varphi)$ для таблицы $\langle\ \mathcal{T} \mid \varphi\ \rangle$, где φ — произвольная $\mathcal{T}$-общезначимая формула

Утверждение

Существует алгоритм, останавливающийся тогда и только тогда, когда на вход подан код какой-либо общезначимой формулы φ, и выдающий в ответ код вывода $Tab(\varphi)$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

И как существование всех этих алгоритмов нам поможет в сооружении парадокса лжеца?

Вычислимая функция — это частично определённое отображение $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такое что существует реализующий его алгоритм

(*предполагаю, что понятие вычислимой функции вам знакомо, поэтому подробнее на нём не останавливаюсь*)

График функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ — это множество всех пар чисел (i, j), таких что значение $f(i)$ определно и равно j

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ арифметизуемо, если существует формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ в сигнатуре формальной арифметики, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}] \quad \Leftrightarrow \quad (\widetilde{d^n}) \in R$$

Утверждение

График любой вычислимой функции арифметизуем

(это утверждение непростое,
но доказывать его долго и сложно)

Как следствие, арифметизуемым будет график такой функции:

$$f_t(i) = \begin{cases} g(Tab(g^{-1}(i))), & \text{если } i \text{ — код} \\ & \qquad \mathcal{T}\text{-общезначимой формулы} \\ \text{не определено}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Это означает, что существует формула $\mathit{Proof}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, такая что

$$\mathcal{I}_{ar} \models \mathit{Proof}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[d_1, d_2]$$

$$\Leftrightarrow$$

d_2 — код табличного вывода $\mathit{Tab}(\varphi)$,

где φ — формула, кодом которой является число d_1

Рассмотрим такую формулу $\mathit{Val}(\mathrm{x})$:

$$\exists \mathrm{y}\ (\mathit{Proof}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathit{Proof}(\mathit{neg}(\mathrm{x}), \mathrm{y}))$$

($\mathit{neg}(\mathrm{x})$ — *терм, описывающий код формулы* $\neg g^{-1}(x)$)

Что означает формула Val?

$$\mathcal{I}_{ar} \models \mathit{Val}[d] \quad \Leftrightarrow \quad d \text{ — код формулы, истинной в } \mathcal{I}_{ar}$$

Мы выразили свойство истинности формул арифметики на языке самой арифметики, и теперь наконец-таки можем попытаться формализовать парадокс лжеца

Теорема Гёделя о неполноте

Набросок доказательства

Лемма о диагонали

Для любой арифметической формулы $\varphi(\mathtt{x})$ существует арифметическое предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \varphi(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

*(это второе нетривиальное утверждение,
которое приведено без доказательства)*

Применим лемму о диагонали к формуле $\varphi = \neg \mathit{Val}$:

Существует предложение ψ, такое что

$$\mathcal{I}_{ar} \models (\psi \leftrightarrow \neg \mathit{Val}(\mathtt{x}))[g(\psi)]$$

И что же это означает?

Предложение ψ истинно в $\mathcal{I}_{ar}$ $\Leftrightarrow$ оно ложно в $\mathcal{I}_{ar}$

Аксиомы равенства

Предикатный символ $=^{(2)}$ нередко используется в "реальных" теориях с одинаковым смыслом: **равенство предметов**

Аксиомы, используемые для придания символу $=^{(2)}$ смысла равенства, также оказываются похожими в разных теориях

Множество аксиом равенства произвольной сигнатуры σ, содержащей предикатный символ $=^{(2)}$, состоит из:

- всех аксиом теории равенства $\mathcal{T}_=$
- аксиом
  $$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \forall \widetilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{n}}\, (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{y}_\mathrm{n} \to \mathbf{f}(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{n}))$$
  для всех функциональных символов $\mathbf{f}^{(n)}$ сигнатуры σ
- аксиом
  $$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \forall \widetilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{n}}\, (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{y}_\mathrm{n} \to (\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{n})))$$
  для всех предикатных символов $\mathrm{P}^{(n)}$ сигнатуры σ, кроме $=^{(2)}$

Арифметика Пресбургера

А есть ли нетривиальный фрагмент арифметики, который всё-таки можно адекватно описать "хорошей" системой аксиом?

Исключим умножение из рассмотренного фрагмента арифметики:

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathbf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

$\mathcal{I}_{pa}$ — это интерпретация, получаемая из $\mathcal{I}_{ar}$ удалением оценки функционального символа $\times$

Каковы выразительные возможности такого фрагмента арифметики?

Можно ли предоставить "хорошую" систему аксиом, адекватно описывающую интерпретацию $\mathcal{I}_{pa}$?

Так как ответы на эти вопросы давно известны, начнём непосредственно с системы аксиом

Арифметика Пресбургера

$$\sigma_{pa} = \left\langle \{\mathbf{0}\}, \{+^{(2)}, \mathsf{S}^{(1)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$$

Арифметика Пресбургера — это теория $\mathcal{T}_{pa}$ сигнатуры σ_{pa}, состоящая из

- аксиом равенства
- аксиом, определяемых схемой математической индукции
  - $\varphi(x)\,\{x/\mathbf{0}\}\,\&\,\forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x)\,\{x/\mathsf{S}(x)\}) \to \forall x\,\varphi(x)$
- ещё четырёх аксиом:
  - $\forall x\,\neg(\mathsf{S}(x) = \mathbf{0})$
  - $\forall x\,\forall y\,(\mathsf{S}(x) = \mathsf{S}(y) \to x = y)$
  - $\forall x\,(x + \mathbf{0} = x)$
  - $\forall x\,\forall y\,(x + \mathsf{S}(y) = \mathsf{S}(x + y))$

Утверждение. $\mathcal{I}_{pa} \models \mathcal{T}_{pa}$

Доказательство. Очевидно?

Теорема разрешимости арифметики Пресбургера

Теория $\mathcal{T}_{pa}$ разрешима

Доказательство.

Введём несколько сокращений:

$$(\alpha \in \mathbb{N},\ \beta \in \mathbb{N}_0,\ \mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_{t_1} \cup \mathsf{Var}_{t_2})$$

- α — это $\underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{S}(\dots\mathbf{S}}_{\alpha\ \text{раз}}(\mathbf{0})\dots))$
- βt — это $\underbrace{t + t + \dots + t}_{\beta\ \text{раз}}$
- $t_1 > t_2$ — это $\exists \mathrm{x}\ (t_1 = t_2 + \mathrm{x} \,\&\, \neg(\mathrm{x} = \mathbf{0}))$
- $t_1 \equiv_\alpha t_2$ — это $\exists \mathrm{x}\ (t_1 + \alpha \mathrm{x} = t_2) \vee \exists \mathrm{x}\ (t_2 + \alpha \mathrm{x} = t_1)$
- все отношения, обратные к $>$, $\equiv_\alpha$, $=$, введём как отрицания этих отношений

Будем в доказательстве считать α и βt термами, а остальные сокращения — атомами

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Рефлексивность равенства: $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Симметричность равенства и аксиома $\forall \mathrm{x}\ \mathbf{S}(\mathrm{x}) \neq \mathbf{0}$: $\qquad (\alpha \in \mathbb{N}_0)$

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{S}(\alpha) \neq \mathbf{0} \text{ и } \models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} \neq \mathbf{S}(\alpha)$$

Аксиомы равенства и $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathbf{S}(\mathrm{y}) \to \mathrm{x} = \mathrm{y})$: $\qquad (\beta \in \mathbb{N}_0)$

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{S}(\alpha) = \mathbf{S}(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \beta$$

Непротиворечивость теории:

$$\not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} \neq \mathbf{0},\ \not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{S}(\alpha) = \mathbf{0} \text{ и } \not\models_{\mathcal{T}_{pa}} \mathbf{0} = \mathbf{S}(\alpha)$$

Значит, $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \alpha = \beta$

Аналогично (*хотя и технически сложнее*) можно показать, что

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \alpha > \beta$$

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \alpha \equiv_\gamma \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \alpha \equiv_\gamma \beta$$

Бескванторная формула — это формула, не содержащая кванторов

Итог: для любого бескванторного предложения φ верно

$$\models_{\mathcal{T}_{pa}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}_{pa} \models \varphi$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

А как быть с **произвольной** формулой $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$?

Шаг 1: перейти к предложению ψ: $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi$

$$\left(\textit{очевидно},\ \models_{\mathcal{T}_{pa}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi\right)$$

Шаг 2: преобразовать ψ в **бескванторное** предложение χ, такое что $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models_{\mathcal{T}_{pa}} \chi$

Шаг 3: общезначимость предложения χ проверяется легко: это булева формула над высказываниями о равенстве, равенстве по модулю и неравенстве целых неотрицательных чисел

Осталось показать, как преобразуется формула на шаге 2

На некоторое время забудем о теории $\mathcal{T}_{pa}$:

$$\cancel{\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi \Leftrightarrow \models_{\mathcal{T}_{pa}} \chi}$$

$$\mathcal{I}_{pa} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}_{pa} \models \chi$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Каждый шаг преобразования состоит из нескольких этапов:

- заменим все кванторы $\forall$ на $\exists$: $\forall \mathrm{x}\ \varphi \approx \neg\exists \mathrm{x}\ \neg\varphi$
- рассмотрим подформулу $\exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$,
  где φ — бескванторная формула
- преобразуем φ в ДНФ, используя законы булевой алгебры
- вынесем за квантор $\exists \mathrm{x}$ слагаемые, не содержащие x:
  $$\exists \mathrm{x}\ (\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \vee \psi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})) \approx \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \vee \exists \mathrm{x}\ \psi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$$
- перенесём квантор $\exists \mathrm{x}$ под каждое слагаемое:
  $$\exists \mathrm{x}\ (K_1 \vee \dots \vee K_n) \approx \exists \mathrm{x}\ K_1 \vee \dots \vee \exists \mathrm{x}\ K_n$$
- каждую формулу $\exists \mathrm{x}\ K_i$ преобразуем в бескванторную с сохранением её значения в $\mathcal{I}_{pa}$

Формула $K_i(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ трактуется в $\mathcal{I}_{pa}$ как

система (не)равенств над $\mathbb{N}_0$

Покажем, как исключить x из произвольной системы с сохранением проекции множества решений на $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Каждое (не)равенство системы можно привести к одной из следующих форм: (t_1, t_2 *не зависят от* $\mathtt{x}$)

$$\begin{array}{llll} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 < t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \le t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\beta t_2 \\ \alpha\mathtt{x} + t_1 \ne t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 > t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \ge t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \not\equiv_\beta t_2 \end{array}$$

$$A \not\equiv_\beta B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A \equiv_\beta B + 1 \\ A \equiv_\beta B + 2 \\ \ldots \\ A \equiv_\beta B + (\beta - 1) \end{array}\right. \qquad A \ge B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ A > B \end{array}\right.$$

$$A \ne B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < B \end{array}\right. \qquad A \le B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ A < B \end{array}\right.$$

Значит, достаточно рассмотреть системы только над такими (не)равенствами:

$$\begin{array}{ll} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 < t_2 \\ \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\beta t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 > t_2 \end{array}$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Если система содержит хотя бы одно равенство $=$, то исключить $\mathtt{x}$ можно так:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ S(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \end{cases} \Leftrightarrow_{(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})} \begin{cases} t_1 \equiv_\alpha t_2 \\ t_2 \geq t_1 \\ S(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \gtrless t_4 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \gtrless \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha\beta\mathtt{x} + \alpha t_3 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \ldots \end{cases}$$

Пусть теперь система не содержит равенств $=$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Во всех строгих неравенствах системы можно получить одинаковые левые части:

$$\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \gtrless_1 t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \gtrless_2 t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta \mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless_1 \beta t_2 + \alpha t_3 \\ \alpha\beta \mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless_2 \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{cases}$$

Если система содержит много строгих неравенств (*в одну сторону*) с одинаковыми левыми частями, то можно исключить $\mathtt{x}$ из всех неравенств, кроме одного:

$$\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t \gtrless t_1 \\ \alpha \mathtt{x} + t \gtrless t_2 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t \gtrless t_1 \\ t_1 \underset{<}{\overset{>}{=}} t_2 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t \gtrless t_2 \\ t_2 \gtrless t_1 \end{cases} \end{array} \right. \\ \dots \end{array} \right.$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Равенства по модулю разных чисел можно привести к равенствам по модулю одного числа:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\delta t_4 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\delta\mathtt{x} + \delta t_1 \equiv_{\gamma\delta} \delta t_2 \\ \beta\gamma\mathtt{x} + \gamma t_3 \equiv_{\gamma\delta} \gamma t_4 \\ \ldots \end{cases}$$

Итог: осталось показать, как исключить $\mathtt{x}$ из системы, содержащей

- не более одного неравенства $\alpha\mathtt{x} + t > t_1$,
- не более одного неравенства $\alpha\mathtt{x} + t < t_2$ с той же левой частью и
- произвольное число равенств $\beta_i\mathtt{x} + t_3^i \equiv_\gamma t_4^i$ по одинаковому модулю γ

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Как исключить $\mathtt{x}$ из неравенства $>$:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t > t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t < t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \ldots \end{cases}$$

Если $t > t_1$, то неравенство выполнено

Для **каждого** решения системы, такого что $t \leq t_1$, найдётся решение, отличающееся только значением $\mathtt{x}$:

$$\alpha\mathtt{x} + t \in \{t_1 + 1, \ldots, t_1 + \alpha\gamma\}$$

Значит, неравенство $\alpha\mathtt{x} + t > t_1$ можно заменить на совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t > t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t = t_1 + 1 \\ \alpha\mathtt{x} + t = t_1 + 2 \\ \ldots \\ \alpha\mathtt{x} + t = t_1 + \alpha\gamma \end{array}\right.$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Как исключить $\mathtt{x}$ из $<$ и $\equiv_\gamma$, когда он исключён из $>$:

$$\begin{cases} [\alpha\mathtt{x} + t < t_2] \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} [t < t_2] \\ t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \\ \begin{cases} [\alpha + t < t_2] \\ \beta + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} [\alpha(\gamma - 1) + t < t_2] \\ \beta(\gamma - 1) + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \end{array}\right.$$

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

И причём здесь теория $\mathcal{T}_{pa}$?

Сохранение $\mathcal{T}_{pa}$-(не)общезначимости формулы на каждом **элементарном шаге** преобразования системы (не)равенств, записанном как преобразование формулы, обосновывается аналогично тому, как обосновывалось точное арифметическое осмысление бескванторных предложений в начале доказательства

Примеры таких элементарных шагов:

- перестановка слагаемых
- вынесение переменной x в каждой части
- добавление [вычитание] равных чисел к частям [из частей] (не)равенства
- умножение (не)равенства на число (для (не)равенства по модулю — с домножением основания на то же число)
- ...

Доказательство разрешимости арифметики Пресбургера

Вопрос на понимание:

А где в доказательстве применяется схема математической индукции?

▼

Арифметика Пресбургера

Теорема полноты арифметики Пресбургера
Арифметика Пресбургера полна

Теорема о выразительности арифметики Пресбургера
Существует формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ сигнатуры σ_{pa}, выполняющаяся в интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ в точности на наборах предметов множества $\mathcal{D}$

$$\Leftrightarrow$$

Существует совокупность систем линейных (не)равенств вида $=$, $\neq$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\equiv_\alpha$, $\not\equiv_\alpha$ над $\mathbb{N}_0$ с множеством решений $\mathcal{D}$

Арифметика Пресбургера

Доказательство теорем полноты и выразительности.

Внимательно изучив доказательство теоремы разрешимости, можно убедиться, что

- каждую формулу $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ можно преобразовать в бескванторную формулу $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ над сигнатурой, расширенной всеми требуемыми (не)равенствами, имеющую тот же арифметический смысл
- формула $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ имеет в интерпретации $\mathcal{I}_{pa}$ смысл совокупности систем линейных (не)равенств над $\mathbb{N}_0$
- если φ — предложение, то ψ — бескванторное предложение, для которого верно либо $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \psi$, либо $\models_{\mathcal{T}_{pa}} \neg\psi$ ▼

Конец лекции 11