Математическая логика и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2015, весенний семестр

Лекция 11

Стратегии резолютивного вывода

Резолютивный вывод как средство вычисления

Стратегии резолютивного вывода

Начнём с примера:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
R(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & (F) \\
Q(x_2, x_2), & (R) \\
\neg Q(x_3, y_3) \vee \neg Q(y_3, z_3) \vee Q(x_3, z_3), & (T) \\
\neg R(x_4, y_4) \vee Q(x_4, y_4), & (L) \\
\neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &
\end{array}
\right\}
$$

Как может выглядеть резолютивный вывод из такой системы?

$$
\begin{tikzcd}
\neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \arrow[d, "{\{x_4/\mathbf{a},\, y_4/\mathbf{b}\}}"'] & & \mathrm{L} \arrow[dll] \\
\neg R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \arrow[d, "\varepsilon"'] & & \mathrm{F} \arrow[dll] \\
\square & &
\end{tikzcd}
$$

Стратегии резолютивного вывода

Начнём с примера:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
R(\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{(F)} \\
Q(x_2, x_2), & \text{(R)} \\
\neg Q(x_3, y_3) \vee \neg Q(y_3, z_3) \vee Q(x_3, z_3), & \text{(T)} \\
\neg R(x_4, y_4) \vee Q(x_4, y_4), & \text{(L)} \\
\neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &
\end{array}
\right\}
$$

Как может выглядеть резолютивный вывод из такой системы?

$$
\begin{tikzcd}
\neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \arrow[d, "{\{x_3/\mathbf{a},\, y_3/y,\, z_3/\mathbf{b}\}}"'] & \mathrm{T} \arrow[dl] \\
\neg Q(\mathbf{a}, y) \vee \neg Q(y, \mathbf{b}) \arrow[d, "{\{x_2/\mathbf{b},\, y/\mathbf{b}\}}"'] & \mathrm{R} \arrow[dl] \\
\neg Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \arrow[d] & \\
\infty &
\end{tikzcd}
$$

Стратегии резолютивного вывода

Начнём с примера:

$$\left\{\begin{array}{ll} R(\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{(F)} \\ Q(x_2,x_2), & \text{(R)} \\ \neg Q(x_3,y_3) \vee \neg Q(y_3,z_3) \vee Q(x_3,z_3), & \text{(T)} \\ \neg R(x_4,y_4) \vee Q(x_4,y_4), & \text{(L)} \\ \neg Q(\mathbf{a},\mathbf{b}) & \end{array}\right\}$$

Как может выглядеть резолютивный вывод из такой системы?

R

$$\neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,z) \vee Q(x,z)$$

T

$$\neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,x)$$

$$\neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,z) \vee \\ \neg Q(x,y') \vee \neg Q(y',z) \vee Q(x,z)$$

$$\neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,z) \vee \neg Q(x,y') \vee \neg Q(y',z) \vee \neg Q(z,x)$$

$$\downarrow$$

$$\vdots$$

Стратегии резолютивного вывода

В резолютивном выводе не сказано, в каком порядке применять правила резолюции и склейки для вывода $\square$

Стратегия резолютивного вывода — это набор ограничений на применение правил вывода, согласно которым строится резолютивный вывод

Стратегия резолютивного вывода полна, если она позволяет вывести $\square$ из любой противоречивой системы

А как могут выглядеть стратегии резолютивного вывода?

Стратегии резолютивного вывода

Семантическая резолюция

Пусть S — противоречивая система дизъюнктов

Выберем какую-нибудь интерпретацию I

Разобьём S на две части (и будем добавлять в них всё, что строится в процессе вывода):

$$S_+^I = \{D \mid D \in S,\ I \models D\}, \qquad S_-^I = \{D \mid D \in S,\ I \not\models D\}$$

Будем использовать такое ограничение:

резольвенты строятся только для одного дизъюнкта из S_+^I и одного дизъюнкта из S_-^I

Правило I-резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}\ , D_1 \vee L_1 \in S_+^I,\ D_2 \vee \neg L_2 \in S_-^I,\ \theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$$

I-резолютивный вывод: (обычный) резолютивный вывод, только правило резолюции заменено на правило I-резолюции

Стратегии резолютивного вывода

Семантическая резолюция

Например:

$$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C,\ A \vee C,\ B \vee C,\ \neg C\}$$

Рассмотрим такую эрбрановскую интерпретацию: $I = \emptyset$

Тогда:

S^I_+: $D_1 = \neg A \vee \neg B \vee C$
$D_2 = \neg C$

S^I_-: $D_3 = A \vee C$
$D_4 = B \vee C$

И I-резольвенты могут строиться так:

$D_5 = D_1 + D_3 = \neg B \vee C$
$D_6 = D_1 + D_4 = \neg A \vee C$

$D_7 = D_2 + D_3 = A$
$D_8 = D_2 + D_4 = B$
$D_9 = D_5 + D_8 = C$
$D_9 + D_2 = \square$

Стратегии резолютивного вывода

Семантическая резолюция

Теорема полноты I-резолютивного вывода

Для любой противоречивой системы дизъюнктов S и любой интерпретации I существует I-резолютивный вывод $\square$ из S

Доказательство.

Самостоятельно

Стратегии резолютивного вывода

Входная резолюция

Пусть S — противоречивая система дизъюнктов

Выберем дизъюнкт D_0, $\quad D_0 \in S$

Вывод будем строить так:

- первую резольвенту получим из D_0 и какого-либо дизъюнкта из $S \setminus \{D_0\}$
- i-ю резольвенту получим из $(i-1)$-й резольвенты и какого-либо дизъюнкта из S

В результате будет построен входной резолютивный вывод, инициированный дизъюнктом D_0

Стратегии резолютивного вывода

Входная резолюция

Например:

$$S = \{\neg A \vee \neg B \vee C,\ A \vee C,\ B \vee C,\ \neg C\}$$

Входной резолютивный вывод из S, инициированный дизъюнктом $\neg C$, может выглядеть так:

$$\begin{tikzcd}
\neg C \arrow[d] & \neg A \vee \neg B \vee C \arrow[dl] \\
\neg A \vee \neg B \arrow[d] & A \vee C \arrow[dl] \\
\neg B \vee C \arrow[d] & \neg C \arrow[dl] \\
\neg B \arrow[d] & B \vee C \arrow[dl] \\
C \arrow[d] & \neg C \arrow[dl] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Ещё раз о том, для чего пригоден метод резолюций

На какие вопросы он может ответить?

Самое простое:

верно ли, что формула ψ общезначима?

- Строим отрицание
- Приводим к предварённой нормальной форме
- Преобразуем в сколемовскую стандартную форму
- Выписываем систему дизъюнктов S_ψ
- Строим резолютивный вывод пустого дизъюнкта из S_ψ

Резолютивный вывод как средство вычисления

Ещё раз о том, для чего пригоден метод резолюций

На какие вопросы он может ответить?

Немного более хитрое:

если мы знаем, что формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ верны, то будет ли верна формула φ?

В такой постановке $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — база знаний, а φ — запрос

- Формально: $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \overset{?}{\models} \varphi$
- То же самое: $\overset{?}{\models} \varphi_1 \& \ldots \& \varphi_k \to \varphi$
- Свели к предыдущей задаче

Резолютивный вывод как средство вычисления

Ещё раз о том, для чего пригоден метод резолюций

На какие вопросы он может ответить?

Ещё более хитрое:

а что если $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — дизъюнкты и
$\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_n \; A(x_1, \ldots, x_n)$?

- Сразу выписываем систему дизъюнктов:
$$S = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \neg A(x_1, \ldots, x_n)\}$$
- Строим резолютивный вывод пустого дизъюнкта из S

Резолютивный вывод как средство вычисления

Ещё раз о том, для чего пригоден метод резолюций

На какие вопросы он может ответить?

И наконец:

а если запрос имеет вид $A(x_1, \dots, x_n)$,
и требуется вычислить значения $t_1, \dots, t_n$, для которых верно
$\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \models \varphi(t_1, \dots, t_n)$?

- Выписываем ту же систему дизъюнктов
- Строим успешный резолютивный вывод
- Выписываем унификаторы $\theta_1, \dots, \theta_m$, полученные при построении вывода
- Применяем их к целевым переменным $x_1, \dots, x_n$ — и получаем ответ:

$$t_1 = x_1\theta_1 \dots \theta_m, \qquad \dots, \qquad t_n = x_n\theta_1 \dots \theta_m$$

Для примера в конце предыдущей лекции это сработало

Но можно привести и более серьёзный пример

Резолютивный вывод как средство вычисления

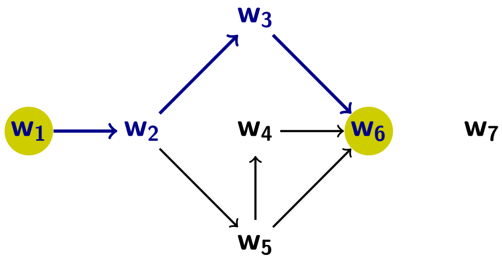
Поиск пути в графе

Дано: граф Γ, вершины u, v этого графа.

Найти: маршрут из вершины u в вершину v

Например,

Γ:



$$u = \mathbf{w}_1, \; v = \mathbf{w}_6$$

Один из ответов — маршрут

$$\mathbf{w}_1 \to \mathbf{w}_2 \to \mathbf{w}_3 \to \mathbf{w}_6$$

Но как его вычислить?

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Прежде чем что-то вычислять, надо это сначала записать формально:

- $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \dots, \mathbf{w_6}, \dots, \mathbf{w_n}, \dots$ — это константы
- $Arc^{(2)}$ — предикатный символ:

$$Arc(x, y) = \text{“в графе есть дуга } x \to y\text{”}$$

Тогда имеем такой набор формул, в точности описывающих Γ:

$$\begin{array}{ll} Arc(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}) & Arc(\mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}) \\ Arc(\mathbf{w_2}, \mathbf{w_5}) & Arc(\mathbf{w_3}, \mathbf{w_6}) \\ Arc(\mathbf{w_4}, \mathbf{w_6}) & Arc(\mathbf{w_5}, \mathbf{w_4}) \\ Arc(\mathbf{w_5}, \mathbf{w_6}) & \end{array}$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Кроме того, надо уметь записывать маршруты

Маршрут — это последовательность (список) дуг

Значит, надо определить, что такое список

- **nil** — это список (**nil** $\in$ *Const* — пустой список)
- если T — список и h — произвольный терм, то $\mathbf{.}(h, T)$ — список ($\mathbf{.}^{(2)} \in$ *Func* — конструктор списков)

При этом

h — это заголовок (или голова) списка $\mathbf{.}(h, T)$,

а T — его хвост

Для $\mathbf{.}^{(2)}$ будем использовать инфиксную запись:

вместо $\mathbf{.}(h, T)$ писать $h\,\mathbf{.}\,T$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Что и как можно записывать в терминах списков?

Например,

пустой список: **nil**

список из одного элемента X: $X \,\centerdot\, \mathbf{nil}$

упорядоченная пара $\langle X, Y \rangle$: $X \,\centerdot\, (Y \,\centerdot\, \mathbf{nil})$

последовательность букв **а**, **б**, **в**, **г**: **а** $\centerdot$ (**б** $\centerdot$ (**в** $\centerdot$ (**г** $\centerdot$ **nil**)))

матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$(1 \,\centerdot\, (2 \,\centerdot\, \mathbf{nil})) \,\centerdot\, ((3 \,\centerdot\, (4 \,\centerdot\, \mathbf{nil})) \,\centerdot\, \mathbf{nil})$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Что и как можно записывать в терминах списков?

Например,

пустой список:	**nil**
список из одного элемента X:	X **.** **nil**
упорядоченная пара $\langle X, Y\rangle$:	X **.** Y **.** **nil**
последовательность букв **а**, **б**, **в**, **г**:	**а . б . в . г . nil**

матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$(1 \mathbin{\boldsymbol{.}} 2 \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathbf{nil}) \mathbin{\boldsymbol{.}} (3 \mathbin{\boldsymbol{.}} 4 \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathbf{nil}) \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathbf{nil}$$

Далее оператор **.** считаем ассоциативным вправо

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

И ещё немного о списках

nil . nil — это тоже список (состоящий из одного только пустого списка)

Расстановка скобок важна: (1 . **nil**) . 2 . **nil** . **nil** — это список из **трёх** элементов:

- списка из одной только единицы
- константы 2
- пустого списка

Суффикс " . **nil**" тоже важен:

- X . **nil** — это список из одного элемента X,
- тогда как X — это сам элемент X;
- а вот **а . б . в . г** — это вообще не список

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Теперь можно легко записать маршрут, используя списки:

- дуга $\mathbf{w_i} \to \mathbf{w_j}$ — это упорядоченная пара $\langle \mathbf{w_i}, \mathbf{w_j} \rangle$, то есть список $\mathbf{w_i} \,.\, \mathbf{w_j} \,.\, \mathbf{nil}$
- маршрут — это список дуг; например, в виде списка
$$(\mathbf{w_1} \,.\, \mathbf{w_2} \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, (\mathbf{w_2} \,.\, \mathbf{w_3} \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, \mathbf{nil}$$
записывается маршрут $\mathbf{w_1} \to \mathbf{w_2} \to \mathbf{w_3}$

Но запись $(\mathbf{w_1} \,.\, \mathbf{w_2} \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, (\mathbf{w_2} \,.\, \mathbf{w_3} \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, \mathbf{nil}$ может иметь много разных значений

Попробуем формально записать определение маршрута

Добавим в алфавит предикатный символ $Path^{(3)}$:

$Path(x, y, t) =$ “t есть маршрут из вершины x в вершину y”

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Какими формулами можно в точности описать,
что такое маршрут?

1. Из любой вершины в саму себя ведёт пустой маршрут

$$\forall x\ Path(x, x, \mathbf{nil})$$

2. Если $x \to y$ — дуга и $y \rightsquigarrow z$ — маршрут, то $x \to y \rightsquigarrow z$ — маршрут

$$\forall x \forall y \forall z \forall u\ (Arc(x, y) \& Path(y, z, u) \to Path(x, z, (x \mathbin{\centerdot} y \mathbin{\centerdot} \mathbf{nil}) \mathbin{\centerdot} u))$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе
Что имеем в итоге?

База знаний KB:

$$\left\{\begin{array}{ccc} Arc(\mathbf{w_1},\mathbf{w_2}), & Arc(\mathbf{w_2},\mathbf{w_3}), & Arc(\mathbf{w_2},\mathbf{w_5}), \\ Arc(\mathbf{w_3},\mathbf{w_6}), & Arc(\mathbf{w_4},\mathbf{w_6}), & Arc(\mathbf{w_5},\mathbf{w_4}), \\ & Arc(\mathbf{w_5},\mathbf{w_6}), & \\ & Path(x,x,\mathbf{nil}), & \\ \multicolumn{3}{c}{\neg Arc(x,y) \vee \neg Path(y,z,u) \vee Path(x,z,(x\,.\,y\,.\,\mathbf{nil})\,.\,u)} \end{array}\right\}$$

Что требуется найти: маршрут x из вершины $\mathbf{w_1}$ в вершину $\mathbf{w_6}$

То есть имеем такой **запрос**: $Path(\mathbf{w_1},\mathbf{w_6},x)$ — с единственной **целевой переменной** x, и задача может быть поставлена так:

найти значение t этой переменной, такое что
$$KB \models Path(\mathbf{w_1},\mathbf{w_6},t)$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Схема решения такой задачи была выписана в начале лекции:

- свяжем целевую переменную в запросе квантором:
$$\exists x \; Path(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_6}, x)$$
- заменим запрос на его отрицание:
$$\forall x \; \neg Path(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_6}, x)$$
- получившийся дизъюнкт добавим в базу знаний:
$$\left\{ \begin{array}{ccc} Arc(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}), & Arc(\mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}), & Arc(\mathbf{w_2}, \mathbf{w_5}), \\ Arc(\mathbf{w_3}, \mathbf{w_6}), & Arc(\mathbf{w_4}, \mathbf{w_6}), & Arc(\mathbf{w_5}, \mathbf{w_4}), \\ & Arc(\mathbf{w_5}, \mathbf{w_6}), & \\ & Path(x, x, \mathbf{nil}), & \\ \multicolumn{3}{c}{\neg Arc(x, y) \vee \neg Path(y, z, u) \vee Path(x, z, (x \centerdot y \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u)} \\ & \neg Path(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_6}, x) & \end{array} \right\}$$
- попытаемся резолютивно вывести пустой дизъюнкт из получившейся системы

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

$\neg Path(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_6})$ $\qquad$ $\neg Arc(x_1, y_1) \vee \neg Path(y_1, z_1, u_1) \vee Path(x_1, z_1)$

$\theta_1 = \{x/(\mathbf{w_1} \cdot y_1 \cdot \mathbf{nil}) \cdot u_1, \dots\}$

$\neg Arc(\mathbf{w_1}, y_1) \vee \neg Path(y_1, \mathbf{w_6}, u_1)$ $\qquad$ $Arc(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2})$

$\theta_2 = \{y_1/\mathbf{w_2}\}$

$\neg Path(\mathbf{w_2}, \mathbf{w_6}, u_1)$ $\qquad$ $\neg Arc(x_2, y_2) \vee \neg Path(y_2, z_2, u_2) \vee Path(x_2, z_2)$

$\theta_3 = \{u_1/(\mathbf{w_2} \cdot y_2 \cdot \mathbf{nil}) \cdot u_2, \dots\}$

$\neg Arc(\mathbf{w_2}, y_2) \vee \neg Path(y_2, \mathbf{w_6}, u_2)$ $\qquad$ $Arc(\mathbf{w_2}, \mathbf{w_3})$

$\theta_4 = \{y_2/\mathbf{w_3}\}$

$\neg Path(\mathbf{w_3}, \mathbf{w_6}, u_2)$ $\qquad$ $\neg Arc(x_3, y_3) \vee \neg Path(y_3, z_3, u_3) \vee Path(x_3, z_3)$

$\theta_5 = \{u_2/(\mathbf{w_3} \cdot y_3 \cdot \mathbf{nil}) \cdot u_3, \dots\}$

$\neg Arc(\mathbf{w_3}, y_3) \vee \neg Path(y_3, \mathbf{w_6}, u_3)$ $\qquad$ $Arc(\mathbf{w_3}, \mathbf{w_6})$

$\theta_6 = \{y_3/\mathbf{w_6}\}$

$\neg Path(\mathbf{w_6}, \mathbf{w_6}, u_3)$ $\qquad$ $Path(x, x, \mathbf{nil})$

$\theta_7 = \{u_3/\mathbf{nil}\}$

$\square$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Успешный вывод построен, а значит, искомый маршрут есть

Чтобы понять, как он выглядит, рассмотрим полученные унификаторы

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \{x/(\mathbf{w_1} \centerdot y_1 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_1, \dots\} \\
\theta_2 &= \{y_1/\mathbf{w_2}\} \\
\theta_3 &= \{u_1/(\mathbf{w_2} \centerdot y_2 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_2, \dots\} \\
\theta_4 &= \{y_2/\mathbf{w_3}\} \\
\theta_5 &= \{u_2/(\mathbf{w_3} \centerdot y_3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_3, \dots\} \\
\theta_6 &= \{y_3/\mathbf{w_6}\} \\
\theta_7 &= \{u_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}
$$

и применим их к целевой переменной x:

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Успешный вывод построен, а значит, искомый маршрут есть

Чтобы понять, как он выглядит, рассмотрим полученные унификаторы

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \{x/(\mathbf{w_1} \mathbin{\blacksquare} y_1 \mathbin{\blacksquare} \mathbf{nil}) \mathbin{\blacksquare} u_1, \ldots\} \\
\theta_2 &= \{y_1/\mathbf{w_2}\} \\
\theta_3 &= \{u_1/(\mathbf{w_2} \mathbin{\blacksquare} y_2 \mathbin{\blacksquare} \mathbf{nil}) \mathbin{\blacksquare} u_2, \ldots\} \\
\theta_4 &= \{y_2/\mathbf{w_3}\} \\
\theta_5 &= \{u_2/(\mathbf{w_3} \mathbin{\blacksquare} y_3 \mathbin{\blacksquare} \mathbf{nil}) \mathbin{\blacksquare} u_3, \ldots\} \\
\theta_6 &= \{y_3/\mathbf{w_6}\} \\
\theta_7 &= \{u_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}
$$

и применим их к целевой переменной x:

$$x\theta_1 = (\mathbf{w_1} \mathbin{\blacksquare} y_1 \mathbin{\blacksquare} \mathbf{nil}) \mathbin{\blacksquare} u_1$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Успешный вывод построен, а значит, искомый маршрут есть

Чтобы понять, как он выглядит, рассмотрим полученные унификаторы

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \{x/(\mathbf{w_1} \centerdot y_1 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_1, \ldots\} \\
\theta_2 &= \{y_1/\mathbf{w_2}\} \\
\theta_3 &= \{u_1/(\mathbf{w_2} \centerdot y_2 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_2, \ldots\} \\
\theta_4 &= \{y_2/\mathbf{w_3}\} \\
\theta_5 &= \{u_2/(\mathbf{w_3} \centerdot y_3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_3, \ldots\} \\
\theta_6 &= \{y_3/\mathbf{w_6}\} \\
\theta_7 &= \{u_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}$$

и применим их к целевой переменной x:

$$x\theta_1\theta_2 = (\mathbf{w_1} \centerdot \mathbf{w_2} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_1$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Успешный вывод построен, а значит, искомый маршрут есть

Чтобы понять, как он выглядит, рассмотрим полученные унификаторы

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \{x/(\mathbf{w_1} \mathbin{\centerdot} y_1 \mathbin{\centerdot} \mathbf{nil}) \mathbin{\centerdot} u_1, \ldots\} \\
\theta_2 &= \{y_1/\mathbf{w_2}\} \\
\theta_3 &= \{u_1/(\mathbf{w_2} \mathbin{\centerdot} y_2 \mathbin{\centerdot} \mathbf{nil}) \mathbin{\centerdot} u_2, \ldots\} \\
\theta_4 &= \{y_2/\mathbf{w_3}\} \\
\theta_5 &= \{u_2/(\mathbf{w_3} \mathbin{\centerdot} y_3 \mathbin{\centerdot} \mathbf{nil}) \mathbin{\centerdot} u_3, \ldots\} \\
\theta_6 &= \{y_3/\mathbf{w_6}\} \\
\theta_7 &= \{u_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}$$

и применим их к целевой переменной x:

$$x\theta_1\theta_2\theta_3 = (\mathbf{w_1} \mathbin{\centerdot} \mathbf{w_2} \mathbin{\centerdot} \mathbf{nil}) \mathbin{\centerdot} (\mathbf{w_2} \mathbin{\centerdot} y_2 \mathbin{\centerdot} \mathbf{nil}) \mathbin{\centerdot} u_2$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Успешный вывод построен, а значит, искомый маршрут есть

Чтобы понять, как он выглядит, рассмотрим полученные унификаторы

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \{x/(\mathbf{w_1} \centerdot y_1 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_1, \ldots\} \\
\theta_2 &= \{y_1/\mathbf{w_2}\} \\
\theta_3 &= \{u_1/(\mathbf{w_2} \centerdot y_2 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_2, \ldots\} \\
\theta_4 &= \{y_2/\mathbf{w_3}\} \\
\theta_5 &= \{u_2/(\mathbf{w_3} \centerdot y_3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_3, \ldots\} \\
\theta_6 &= \{y_3/\mathbf{w_6}\} \\
\theta_7 &= \{u_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}$$

и применим их к целевой переменной x:

$$x\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 = (\mathbf{w_1} \centerdot \mathbf{w_2} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (\mathbf{w_2} \centerdot \mathbf{w_3} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_2$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Успешный вывод построен, а значит, искомый маршрут есть

Чтобы понять, как он выглядит, рассмотрим полученные унификаторы

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \{x/(\mathbf{w_1} \centerdot y_1 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_1, \ldots\} \\
\theta_2 &= \{y_1/\mathbf{w_2}\} \\
\theta_3 &= \{u_1/(\mathbf{w_2} \centerdot y_2 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_2, \ldots\} \\
\theta_4 &= \{y_2/\mathbf{w_3}\} \\
\theta_5 &= \{u_2/(\mathbf{w_3} \centerdot y_3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_3, \ldots\} \\
\theta_6 &= \{y_3/\mathbf{w_6}\} \\
\theta_7 &= \{u_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}
$$

и применим их к целевой переменной x:

$$
x\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = (\mathbf{w_1} \centerdot \mathbf{w_2} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (\mathbf{w_2} \centerdot \mathbf{w_3} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (\mathbf{w_3} \centerdot y_3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_3
$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Успешный вывод построен, а значит, искомый маршрут есть

Чтобы понять, как он выглядит, рассмотрим полученные унификаторы

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \{x/(\mathbf{w_1} \centerdot y_1 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_1, \ldots\} \\
\theta_2 &= \{y_1/\mathbf{w_2}\} \\
\theta_3 &= \{u_1/(\mathbf{w_2} \centerdot y_2 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_2, \ldots\} \\
\theta_4 &= \{y_2/\mathbf{w_3}\} \\
\theta_5 &= \{u_2/(\mathbf{w_3} \centerdot y_3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_3, \ldots\} \\
\theta_6 &= \{y_3/\mathbf{w_6}\} \\
\theta_7 &= \{u_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}
$$

и применим их к целевой переменной x:

$$x\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6 = (\mathbf{w_1} \centerdot \mathbf{w_2} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (\mathbf{w_2} \centerdot \mathbf{w_3} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (\mathbf{w_3} \centerdot \mathbf{w_6} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_3$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Успешный вывод построен, а значит, искомый маршрут есть

Чтобы понять, как он выглядит, рассмотрим полученные унификаторы

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \{x/(\mathbf{w_1} \centerdot y_1 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_1, \ldots\} \\
\theta_2 &= \{y_1/\mathbf{w_2}\} \\
\theta_3 &= \{u_1/(\mathbf{w_2} \centerdot y_2 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_2, \ldots\} \\
\theta_4 &= \{y_2/\mathbf{w_3}\} \\
\theta_5 &= \{u_2/(\mathbf{w_3} \centerdot y_3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot u_3, \ldots\} \\
\theta_6 &= \{y_3/\mathbf{w_6}\} \\
\theta_7 &= \{u_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}
$$

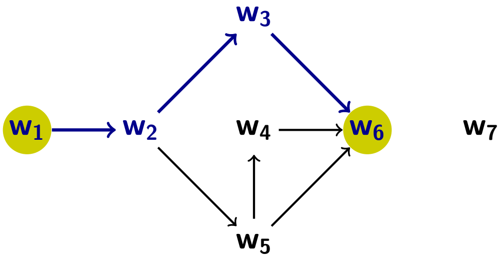
и применим их к целевой переменной x:

$$x\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7 = (\mathbf{w_1} \centerdot \mathbf{w_2} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (\mathbf{w_2} \centerdot \mathbf{w_3} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (\mathbf{w_3} \centerdot \mathbf{w_6} \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot \mathbf{nil}$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Поиск пути в графе

Ответ получен!



$$(w_1 \,.\, w_2 \,.\, nil) \,.\, (w_2 \,.\, w_3 \,.\, nil) \,.\, (w_3 \,.\, w_6 \,.\, nil) \,.\, nil$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

А всегда ли метод резолюций хорошо работает для подобного рода логических задач?

Оказывается, что нет

Например, можно рассмотреть такую задачу:

Если вечером будет дождь, то мы пойдём в кино,
а если дождя не будет, то в парк.
Вопрос: где мы проведём вечер?

Резолютивный вывод как средство вычисления

Где мы проведём вечер?

Как и раньше, прежде всего введём алфавит:

- константы: **кино**, **парк**
- $R^{(0)}$ — предикатный символ:
$$R = \text{“вечером будет дождь”}$$
- $E^{(1)}$ — предикатный символ:
$$E(x) = \text{“вечером мы пойдём в } x\text{”}$$

База знаний:

$$R \to E(\textbf{кино}), \qquad \neg R \to E(\textbf{парк})$$

Запрос: $E(x)$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Где мы проведём вечер?

Пытаемся применить ту же схему, что и раньше: ... и система дизъюнктов:

$$\left\{ \begin{array}{c} \neg R \vee E(\textbf{кино}) \\ R \vee E(\textbf{парк}) \\ \neg E(x) \end{array} \right\}$$

Теперь строим резолютивный вывод

Резолютивный вывод как средство вычисления

Где мы проведём вечер?

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\neg R \vee E(\textbf{кино}) \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\theta_1 = \{x/\textbf{кино}\}"] & & \neg E(x) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\theta_2 = \{x/\textbf{парк}\}"] & & R \vee E(\textbf{парк}) \arrow[dl] \\
& \neg R \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\theta_3 = \varepsilon"'] & & R \arrow[dl] & \\
& & \square & &
\end{tikzcd}$$

успех?

Резолютивный вывод как средство вычисления

Где мы проведём вечер?

Что имеем в итоге?

$$\{R \to E(\textbf{кино}), \neg R \to E(\textbf{парк})\} \models \exists x\, E(x)$$

То есть вечером мы точно **куда-то** пойдём

Но куда же мы пойдём?

Единственное, что мы можем сказать по построенному выводу, — это $x \in \{\textbf{кино}, \textbf{парк}\}$

Мы доказали, что искомый x **существует**, но **не вычислили** его

Иными словами, такое доказательство неконструктивно

Резолютивный вывод как средство вычисления

Чтобы вывод мог выступать в роли вычисления, он должен быть конструктивным

Естественный выход — рассмотреть особый класс формул и для них описать правила построения **конструктивного** успешного вывода

Например, конструктивным является входной резолютивный вывод, инициированный запросом, если запрос встречается в выводе только **единожды**:

он линеен, поэтому вычисляется **последовательность** подстановок, которую можно применить к целевым переменным запроса для получения ответа

И именно такой вывод строился в задачах "о пиве" и "о пути в графе"

Далее будет использоваться только входной резолютивный вывод, инициированный запросом

Резолютивный вывод как средство вычисления

Возможности вывода теперь ограничены, но он стал неполным для систем дизъюнктов общего вида

Какие же выбрать системы дизъюнктов, чтобы

- какой-нибудь из успешных резолютивных выводов обязательно оказывался входным и
- такими системами можно было описывать достаточно широкий класс задач?

Такие системы были описаны: это

системы хорновских дизъюнктов

Положительная литера — это атом
Отрицательная литера — это отрицание атома

Хорновский дизъюнкт — это дизъюнкт, содержащий **не более одной положительной литеры**

Резолютивный вывод как средство вычисления

Например, такие дизъюнкты являются хорновскими:

- $\neg L(\textbf{Паша}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\textbf{Паша}, x)$
- $\neg Arc(\mathbf{w_1}, y_1) \vee \neg Path(y_1, \mathbf{w_6}, u_1)$
- $Arc(\mathbf{w_4}, \mathbf{w_6})$
- $\neg R \vee E(\textbf{кино})$

А дизъюнкт

- $R \vee E(\textbf{парк})$

не является хорновским

Резолютивный вывод как средство вычисления

Как понимать хорновские дизъюнкты?

Дизъюнкт

$$\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee A$$

равносилен формуле

$$A_1 \& \dots \& A_n \to A:$$

"Если выполнены условия $A_1, \dots, A_n$, то утверждение A верно"

Так обычно формулируются позитивные знания

(в том числе безусловные факты: **true** $\to A$)

Резолютивный вывод как средство вычисления

Как понимать хорновские дизъюнкты?

Дизъюнкт
$$\neg C_1 \vee \dots \vee \neg C_n$$
равносилен формуле
$$\neg(C_1 \& \dots \& C_n)$$

Это отрицание запроса вида

“Верно ли, что условия $C_1, \dots, C_n$
могут одновременно выполняться?”

или

“В каком случае будет верно одновременно и C_1, и $\dots$, и C_n?”

Обычно так и формулируется то, что мы хотим выяснить/узнать/спросить/...

Резолютивный вывод как средство вычисления

Таким образом, если ограничиться только **хорновскими дизъюнктами** и **(линейным) входным выводом, инициированным запросом**, то

резолютивное опровержение становится **вычислением** ответов на простые запросы к базе позитивных знаний,

а базы позитивных знаний, с свою очередь, становятся

логическими программами

Конец лекции 11