Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 33

Сéти временны́х автоматов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступление

Для моделей Крипке существуют способы автоматического построения параллельной композиции (синхронной, асинхронной и смешанной)

Такое построение позволяет избежать незаметных, но при этом критичных ошибок, которые пользователь может внести в модель, пытаясь описать такую композицию вручную, и тем самым упрощает разработку модели и повышает уверенность в её правильности

СРВ, как и другие системы, как правило тоже состоят из параллельно выполняющихся компонентов

Ручное построение параллельной композиции временны́х автоматов, моделирующих компоненты СРВ — это процесс даже более подверженный ошибкам, чем то же для моделей Крипке

Поэтому критичными оказываются и средства автоматического построения параллельной композиции временны́х автоматов

Автомат с синхронизацией

Временно́й автомат с синхронизацией $(S, s_0, \mathcal{I}, T, L)$ над множествами атомарных высказываний AP, часов $\mathcal{C}$ и каналов синхронизации $\mathfrak{C}$ отличается от «обычного» временно́го автомата только тем, как устроены его переходы:

- $T \subseteq S \times CC(\mathcal{C}) \times 2^{\mathcal{C}} \times Sync(\mathfrak{C}) \times S$, где $Sync(\mathfrak{C})$ — множество действий синхронизации, устроенное так:
$$Sync(\mathfrak{C}) = \{\mathfrak{c}! \mid \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}\} \cup \{\mathfrak{c}? \mid \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}\} \cup \{\lambda\}$$

Действие λ означает, что переход автомата выполняется так же, как и в обычном временно́м автомате, асинхронно относительно остальных автоматов сети

Переход (s, g, X, α, s') будем изображать так: $s \xrightarrow{g,X,\alpha} s'$

Если переход не помечен действием синхронизации, то это означает действие λ

Автомат с синхронизацией

$$T \subseteq S \times CC(\mathcal{C}) \times 2^{\mathcal{C}} \times Sync(\mathfrak{C}) \times S$$

$$Sync(\mathfrak{C}) = \{\mathfrak{c}! \mid \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}\} \cup \{\mathfrak{c}? \mid \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}\} \cup \{\lambda\}$$

Переход с действием $\mathfrak{c}!$ обязан выполняться одновременно с переходом с парным действием $\mathfrak{c}?$, то есть два автомата с выбранными переходами выполняются синхронно, но при этом асинхронно относительно остальных автоматов сети

Такой тип синхронизации принято называть рандеву (синонимы: точка-точка, рукопожатие, handshake, peer-to-peer)

Действия $\mathfrak{c}!$ и $\mathfrak{c}?$ будут «симметричны» с точки зрения семантики, но тем не менее в связи с тем, как на практике разрабатываются автоматы с синхронизацией, будем называть действие $\mathfrak{c}!$ посылкой сигнала в канал $\mathfrak{c}$, а действие $\mathfrak{c}?$ — приёмом сигнала из канала $\mathfrak{c}$

Сеть временны́х автоматов: синтаксис

Сеть временны́х автоматов (далее для краткости просто сеть) над множествами атомарных высказываний AP, часов $\mathcal{C}$ и каналов синхронизации $\mathfrak{C}$ — это набор $\mathcal{N} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$, где:

- $\mathcal{A}_i = (S^i, s_0^i, \mathcal{I}^i, T^i, L^i)$, $1 \leq i \leq n$, — временной автомат с синхронизацией над теми же часами $\mathcal{C}$ и каналами $\mathfrak{C}$ и над множеством атомарных высказываний AP_i, где $\mathrm{AP}_i \subseteq \mathrm{AP}$
- $\mathrm{AP}_i \cap \mathrm{AP}_j = \emptyset$ для любых номеров i, j, таких что $1 \leq i < j \leq n$
- $\mathrm{AP}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{AP}_n = \mathrm{AP}$
- $S_i \cap S_j = \emptyset$ для любых номеров i, j, таких что $1 \leq i < j \leq n$

Сеть временны́х автоматов: синтаксис

Пример

Смоделируем в виде сети автоматов такую систему:

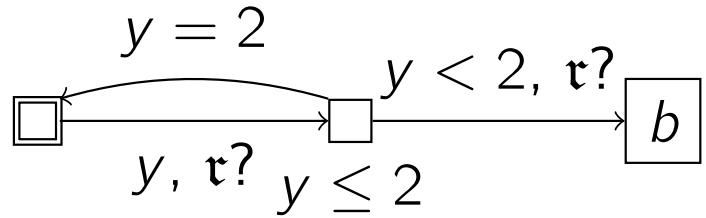
- Пользователь может посылать запросы на сервер
- *Из физических соображений* полагаем, что запросы посылаются не чаще чем раз в секунду
- Если сервер получил два запроса с интервалом строго менее двух секунд, то он ломается

Заведём в сети два автомата: один для пользователя, и один для сервера

Запрос смоделируем как сигнал в канале $\mathfrak{r}$

То, что сервер сломан, смоделируем как атомарное высказывание b

Тогда сеть может быть устроена так:



Сеть временны́х автоматов: семантика

Рассмотрим сеть $\mathcal{N} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ над множеством часов $\mathcal{C}$, где $\mathcal{A}_i = (S^i, s_0^i, \mathcal{I}^i, T^i, L^i)$

Конфигурация сети $\mathcal{N}$ — это пара $(\vec{s}, \nu)$, где $\vec{s} \in S^1 \times \cdots \times S^n$ и ν — оценка часов множества $\mathcal{C}$

Начальная конфигурация сети $\mathcal{N}$ — это $((s_0^1, \ldots, s_0^n), (0, 0, \ldots, 0))$

Шаг вычисления $\to_{\mathcal{N}}$ сети $\mathcal{N}$ — это двуместное отношение на множестве конфигураций, являющееся объединением трёх:

- Продвижение времени: $\sigma \mapsto_{\mathcal{N}} \sigma'$
- Выполнение перехода: $\sigma \hookrightarrow_{\mathcal{N}} \sigma'$
- Шаг рандеву: $\sigma \Rightarrow_{\mathcal{N}} \sigma'$

Сеть временны́х автоматов: семантика

Рассмотрим сеть $\mathcal{N} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ над множеством часов $\mathcal{C}$, где $\mathcal{A}_i = (S^i, s_0^i, \mathcal{I}^i, T^i, L^i)$

Для оценки часов ν, константы d, $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, множества часов X, конфигурации σ и перехода t ряд обозначений дословно переносится с модели автомата на модель сети:

- $\nu + d$
- $\sigma + d$
- $\sigma \overset{d}{\mapsto} \sigma'$
- $\nu[X]$
- $\sigma[X]$

$\sigma[s/s']$ — так будем обозначать конфигурацию, получающуюся из σ заменой состояния s одного из автоматов сети на s'

$\sigma \xhookrightarrow{s_i \xrightarrow{g,X,\alpha} s_i'} \sigma'$ означает, что $\sigma' = \sigma[X][s_i/s_i']$

Сеть временны́х автоматов: семантика

Рассмотрим сеть $\mathcal{N} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ над множеством часов $\mathcal{C}$, где $\mathcal{A}_i = (S^i, s_0^i, \mathcal{I}^i, T^i, L^i)$, и конфигурации $\sigma = ((s_1, \ldots, s_n), \nu)$ и σ'

Продвижение времени

$\sigma \mapsto_{\mathcal{N}} \sigma'$, если существует константа $d \in \mathbb{R}_{>0}$, такая что:

1. $\sigma \overset{d}{\mapsto} \sigma'$
2. $\nu + d \models \mathcal{I}^1(s_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{I}^n(s_n)$

Выполнение перехода

$\sigma \hookrightarrow_{\mathcal{N}} \sigma'$, если в сети $\mathcal{N}$ есть переход $t = (s_k \xrightarrow{g,X,\lambda} s_k')$, такой что:

1. $\nu \models g$
2. $\sigma \overset{t}{\hookrightarrow} \sigma'$
3. $\nu[X] \models \mathcal{I}^k(s_k')$

Сеть временны́х автоматов: семантика

Рассмотрим сеть $\mathcal{N} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ над множеством часов $\mathcal{C}$, где $\mathcal{A}_i = (S^i, s_0^i, \mathcal{I}^i, T^i, L^i)$, и конфигурации $\sigma = ((s_1, \ldots, s_n), \nu)$ и σ'

Шаг рандеву

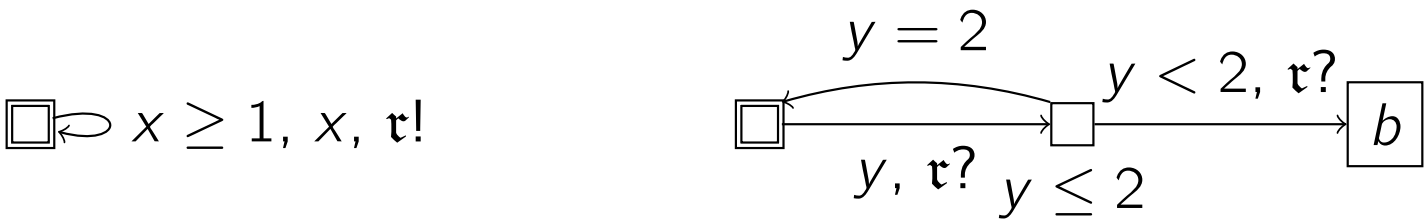
$\sigma \Rightarrow_{\mathcal{N}} \sigma'$, если в сети $\mathcal{N}$ есть канал $\mathfrak{c}$ и переходы $t_1 = (s_k \xrightarrow{g_k, X_k, \mathfrak{c}!} s'_k)$ и $t_2 = (s_m \xrightarrow{g_m, X_m, \mathfrak{c}?} s'_m)$, такие что:

- $k \neq m$
- $\nu \models g_k \,\&\, g_m$
- Для некоторой конфигурации σ'' верно $\sigma \xhookrightarrow{t_1} \sigma'' \xhookrightarrow{t_2} \sigma'$
- $\nu[X_k][X_m] \models \mathcal{I}^k(s'_k) \,\&\, \mathcal{I}^m(s'_m)$

Понятия, основанные на отношении $\rightarrow_{\mathcal{N}}$, дословно переносятся с модели временно́го автомато на модель сети: трасса (в том числе начальная, тупиковая, конвергентная, дивергентная, зеноновская), вычисление, корректность

Сеть временны́х автоматов: семантика

Пример



Это корректная сеть над часами $\{x, y\}$, и вот пример её вычисления для порядка часов (x, y) и для имён состояний (слева направо) n, ℓ, c, r:

$$
\begin{aligned}
&((n, \ell), (0, 0)) \\
\mapsto\ &((n, \ell), (\sqrt{2}, \sqrt{2})) \\
\Rightarrow\ &((n, c), (0, 0)) \\
\mapsto\ &((n, c), (2, 2)) \\
\hookrightarrow\ &((n, \ell), (2, 2)) \\
\Rightarrow\ &((n, c), (0, 0)) \\
\mapsto\ &((n, c), (1, 1)) \\
\Rightarrow\ &((n, r), (0, 1)) \\
\mapsto\ &((n, r), (1, 2)) \\
\mapsto\ &((n, r), (2, 3)) \\
\mapsto\ &\ldots
\end{aligned}
$$

Трансляция сетей в автомат

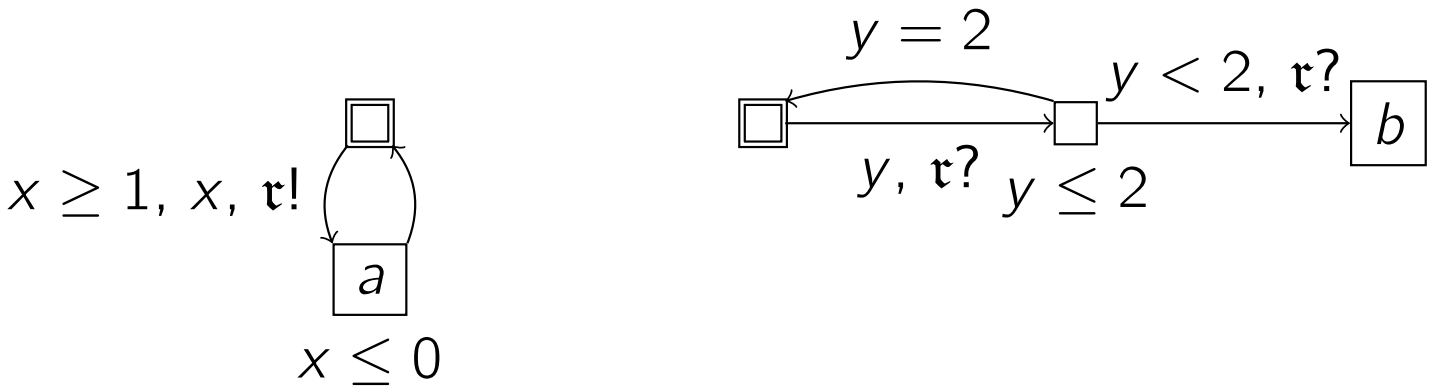
Рассмотрим произвольную сеть $\mathcal{N} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$, где $\mathcal{A}_i = (S^i, s_0^i, \mathcal{I}^i, T^i, L^i)$

Записью $\otimes\mathcal{N}$ обозначим временной автомат $(S, s_0, \mathcal{I}, T, L)$ над теми же атомарными высказываниями и часами, устроенный так:

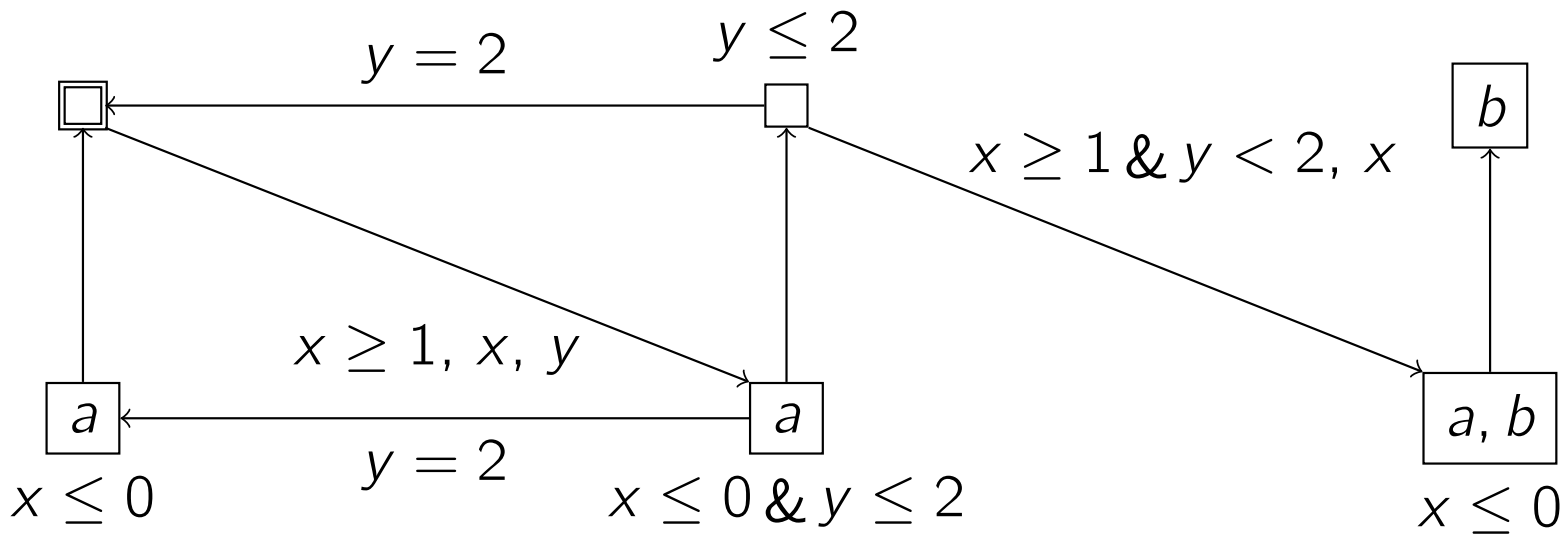
- $S = S^1 \times \cdots \times S^n$
- $s_0 = (s_0^1, \ldots, s_0^n)$
- $\mathcal{I}(s^1, \ldots, s^n) = \mathcal{I}^1(s^1) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathcal{I}^n(s^n)$
- $L(s^1, \ldots, s^n) = L(s^1) \cup \cdots \cup L(s^n)$
- В T входят следующие переходы и только они:
  - $(s^1, \ldots, s^n) \xrightarrow{g, X} (s^1, \ldots, s^{i-1}, q^i, s^{i+1}, \ldots, s^n)$, если $(s^i \xrightarrow{g, X, \lambda} q^i) \in T^i$
  - $(s^1, \ldots, s^n) \xrightarrow{g_1 \,\&\, g_2, X_1 \cup X_2} (s^1, \ldots, s^{i-1}, q^i, s^{i+1}, \ldots, s^{j-1}, q^j, s^{j+1}, \ldots, s^n)$, если $i < j$ и существует канал $\mathfrak{c}$, такой что $(s^i \xrightarrow{g_1, X_1, \alpha_1} q^i) \in T^i$ и $(s^j \xrightarrow{g_2, X_2, \alpha_2} q^j) \in T^j$ и $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{\mathfrak{c}!, \mathfrak{c}?\}$

Трансляция сетей в автомат

Пример



Автомат $\otimes\mathcal{N}$ для сети $\mathcal{N}$ из двух автоматов, изображённой выше:



Трансляция сетей в автомат

Сеть $\mathcal{N}$ и временной автомат $\mathcal{A}$ будем называть эквивалентными ($\mathcal{N} \sim \mathcal{A}$), если

- они определены над одинаковыми множествами атомарных высказываний и часов и
- отношения $\to_{\mathcal{N}}$ и $\to_{\mathcal{A}}$ совпадают

Теорема. **Для любой сети $\mathcal{N}$ верно: $\mathcal{N} \sim \otimes\mathcal{N}$**

Доказательство этой теоремы можно считать нетрудным упражнением