

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 19

Системы дизъюнктов

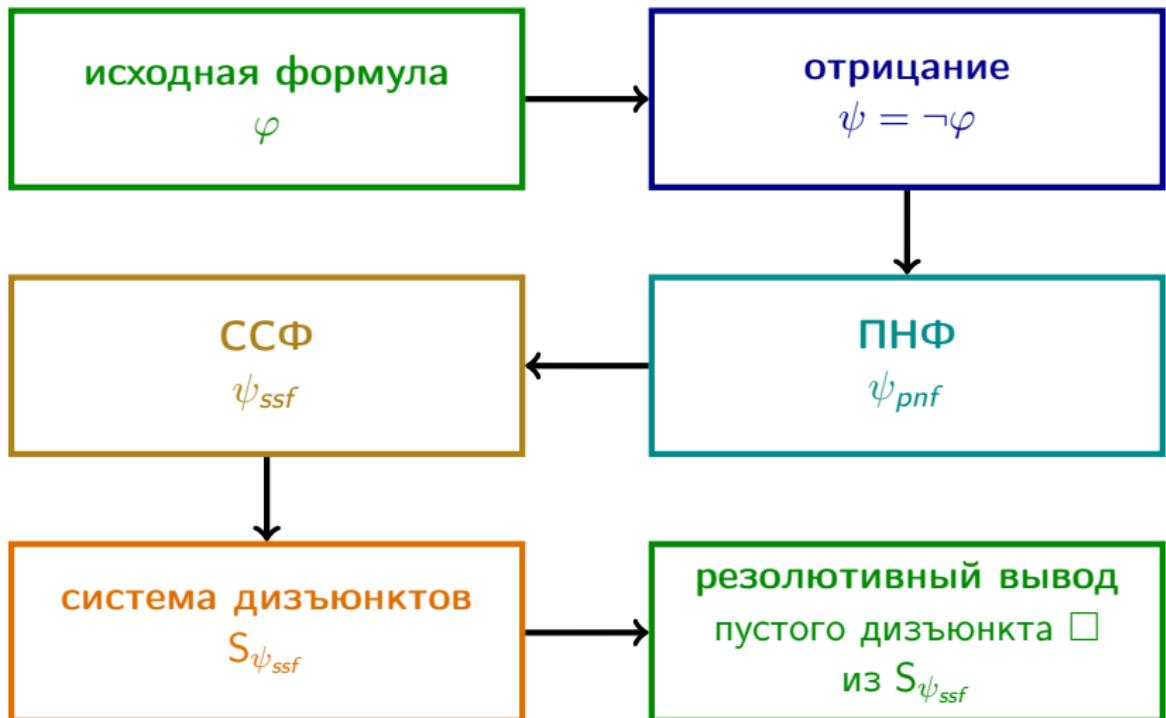
Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

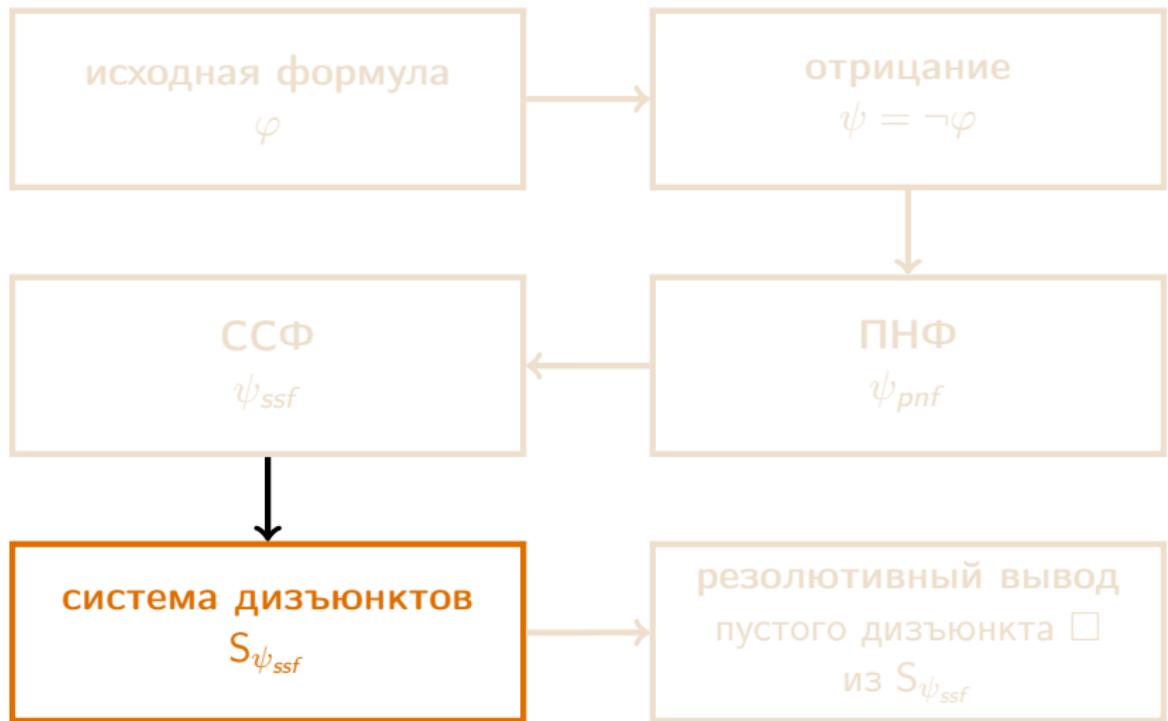
E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf}$$

Системы дизъюнктов

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \tilde{x}^n (L_1 \vee \cdots \vee L_k),$$

где L_i — **литера** (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать
кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall \tilde{x}^n (L_1 \vee \cdots \vee L_k) = L_1 \vee \cdots \vee L_k$$

Для упрощения технических выкладок будем отождествлять между собой
дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых

В связи с таким упрощением будем
отождествлять дизъюнкт с **мультимножеством** его литер:

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k = \{L_1, \dots, L_k\}$$

Системы дизъюнктов

Например: (но это **только** при обсуждении дизъюнктов)

$$\forall x (P(x) \vee P(x) \vee Q(f(c)))$$

=

$$P(x) \vee P(x) \vee Q(f(c))$$

=

$$\{P(x), P(x), Q(f(c))\}$$

=

$$P(x) \vee Q(f(c)) \vee P(x)$$

=

$$\forall x (P(x) \vee Q(f(c)) \vee P(x))$$

Системы дизъюнктов

Пустой дизъюнкт \square — это особый дизъюнкт, представляющий собой пустое множество литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \leq \sim L_1 \vee \cdots \vee L_k \vee \text{f}, \text{ а значит, } \square \leq \sim \text{ f}$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) **множество** дизъюнктов

Система дизъюнктов S **выполнима** ($\Vdash S$)¹,
если она имеет хотя бы одну модель,
и **невыполнима** ($\not\vDash S$) иначе

1 Как и раньше, это обозначение не встречается за пределами слайдов лекций

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall x (\varphi \& \psi) \sim \forall x \varphi \& \forall x \psi$

Доказательство. Очевидно?

(Обосновать эту равносильность настолько же просто,
как и все основные равносильности)

Теорема (о переходе к дизъюнктам)

Для ССФ с любым набором множителей D_1, \dots, D_k верно:

$$\Vdash \forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \Leftrightarrow \Vdash \{\forall \tilde{x}^n D_1, \dots, \forall \tilde{x}^n D_k\}$$

Доказательство.

По утверждению выше, $\forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \sim \forall \tilde{x}^n D_1 \& \dots \& \forall \tilde{x}^n D_k$

Следовательно, с учётом семантики $\&$,

$$\begin{aligned} &\Vdash \forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \\ &\Leftrightarrow \Vdash \forall \tilde{x}^n D_1 \& \dots \& \forall \tilde{x}^n D_k \\ &\Leftrightarrow \Vdash \{\forall \tilde{x}^n D_1, \dots, \forall \tilde{x}^n D_k\} \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Системы дизъюнктов

Пример:

$$\not\models \forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, g(x))) \& \neg R(x, u))$$

\Leftrightarrow

$$\models \{P(x), \quad \neg P(f(x)) \vee R(x, g(x)), \quad \neg R(x, u)\}$$