Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы $\rightarrow$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 37

Теорема Чёрча

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2026, февраль–май

Вступление

Проблема общезначимости формул логики предикатов — это задача распознавания **Valid** следующего вида:

- На вход подаётся пара (σ, φ), где
  - σ — произвольная сигнатура логики предикатов и
  - φ — произвольная формула логики предикатов сигнатуры σ
- $\mathbf{Valid}(\sigma, \varphi) = 1 \Leftrightarrow \models \varphi$

Проблема останова машин Тьюринга — это задача распознавания **Halt** следующего вида:

- На вход подаётся пара (M, w), где
  - M — произвольная машина Тьюринга и
  - w — произвольное ленточное слово (для M)
- $\mathbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ вычисление M на слове w конечно

Лемма о сведéнии проблемы останова

Проблема останова машин Тьюринга m-сводится к проблеме общезначимости формул логики предикатов

Доказательство.

По определению m-сводимости,
достаточно предложить такой алгоритм $\mathcal{A}$:

- Вход: произвольная МТ M и произвольное ленточное слово w
- Выход: сигнатура $\sigma_{M,w}$ и формула $\varphi_{M,w}$ этой сигнатуры
- Выход $\overline{\mathcal{A}}(M, w) = (\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w})$ устроен так:

$$\models \varphi_{M,w} \quad \Leftrightarrow \quad \text{МТ } M \text{ останавливается на } w$$

Сигнатуру $\sigma_{M,w}$ устрóим так:

- Константы: $\mathfrak{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\perp\}$, где $\perp \notin \mathfrak{A} \cup \mathcal{Q}$
- Единственный функциональный символ: $\cdot^{(2)}$
  - Считаем этот символ ассоциативным вправо: $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} \cdot \mathrm{z} = \mathrm{x} \cdot (\mathrm{y} \cdot \mathrm{z})$
- Единственный предикатный символ: $\mathrm{Re}^{(3)}$

Лемма о сведе́нии проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^* \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

Назовём конфигурацию σ достижимой, если она содержится в вычислении M на w:

- Конфигурация $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ достижима
- Если конфигурация σ достижима и $\sigma \to_M \sigma'$, то конфигурация σ' достижима
- Других достижимых конфигураций нет

Тогда $\mathbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$

существует достижимая заключительная конфигурация

Ленточному слову $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_k$ сопоста́вим терм

$$\tau_\alpha = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot \bot$$

Конфигурации $\sigma = (\alpha, q, \beta)$ МТ M сопоста́вим тройку термов $\tau_\sigma = (\tau_{\alpha^-}, q, \tau_\beta)$, где α^- — зеркальный образ слова α: если $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_k$, то $\alpha^- = a_k \ldots a_2 a_1$

Фразе «конфигурация σ достижима» сопоста́вим атом $\mathrm{Re}(\tau_\sigma)$

Лемма о сведе́нии проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^*$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\sigma_{M,w}$, $\varphi_{M,w}$

Каждой команде C, $C \in \mathcal{P}$, сопоста́вим формулу ψ_C:

- Если $C = (q, a, b, R, p)$, то $\psi_C = \psi_C^{R1} \,\&\, \psi_C^{R2}$, где
$$\psi_C^{R1} = \forall\alpha\,\forall\beta\,\forall\mathrm{x}(\mathrm{Re}(\alpha, q, a\cdot\mathrm{x}\cdot\beta) \to \mathrm{Re}(b\cdot\alpha, p, \mathrm{x}\cdot\beta))$$
$$\psi_C^{R2} = \forall\alpha\qquad(\mathrm{Re}(\alpha, q, a\cdot\bot) \to \mathrm{Re}(b\cdot\alpha, p, \Lambda\cdot\bot))$$
- Если $C = (q, a, b, L, p)$, то $\psi_C = \psi_C^{L1} \,\&\, \psi_C^{L2}$, где
$$\psi_C^{L1} = \forall\alpha\,\forall\mathrm{x}\,\forall\beta\,\forall\mathrm{y}(\mathrm{Re}(\mathrm{y}\cdot\mathrm{x}\cdot\alpha, q, a\cdot\beta) \to \mathrm{Re}(\mathrm{x}\cdot\alpha, p, \mathrm{y}\cdot b\cdot\beta))$$
$$\psi_C^{L2} = \qquad\forall\beta\,\forall\mathrm{y}(\mathrm{Re}(\mathrm{y}\cdot\bot, q, a\cdot\beta) \to \mathrm{Re}(\Lambda\cdot\bot, p, \mathrm{y}\cdot b\cdot\beta))$$

По определению отношения $\to_C$,
если $\sigma \to_C \sigma'$, то $\psi_C \models \mathrm{Re}(\tau_\sigma) \to \mathrm{Re}(\tau_{\sigma'})$,
а значит, и $\psi_C, \mathrm{Re}(\tau_\sigma) \models \mathrm{Re}(\tau_{\sigma'})$

Программе $\mathcal{P}$ сопоста́вим формулу $\psi_{\mathcal{P}} = \underset{C\in\mathcal{P}}{\&} \psi_C$

По определению отношения $\to_M$,
если $\sigma \to_M \sigma'$, то $\psi_{\mathcal{P}}, \mathrm{Re}(\tau_\sigma) \models \mathrm{Re}(\tau_{\sigma'})$

Лемма о сведении проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^*$ $\rightsquigarrow$ $\sigma_{M,w}$, $\varphi_{M,w}$

Формулу $\varphi_{M,w}$ зададим так: $\varphi_{M,w} = \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}} \to \psi_f$, где

- $\psi_0 = \mathrm{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)})$ («конфигурация $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ достижима»)
- $\psi_f = \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$ («существует достижимая заключительная конфигурация»)

Осталось показать, что **Halt**$(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ **Valid**$(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}) = 1$

Но перед этим небольшой **пример** (иллюстрация)

Пусть $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (1, L, q_f) \quad \text{и} \quad \mathcal{P}(q_0, 1) = (0, R, q_0)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\varphi_{M,1011} = {} & \mathrm{Re}(0 \cdot \bot, q_0, 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \bot) \\
& \&\, \forall\alpha\, \forall\mathrm{x}\, \forall\beta\, \forall\mathrm{y}\, (\mathrm{Re}(\mathrm{y} \cdot \mathrm{x} \cdot \alpha, q_0, 0 \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(\mathrm{x} \cdot \alpha, q_f, \mathrm{y} \cdot 1 \cdot \beta)) \\
& \&\, \forall\beta\, \forall\mathrm{y}\, (\mathrm{Re}(\mathrm{y} \cdot \bot, q_0, 0 \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(0 \cdot \bot, q_f, \mathrm{y} \cdot 1 \cdot \beta)) \\
& \&\, \forall\alpha\, \forall\beta\, \forall\mathrm{x}\, (\mathrm{Re}(\alpha, q_0, 1 \cdot \mathrm{x} \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(0 \cdot \alpha, q_0, \mathrm{x} \cdot \beta)) \\
& \&\, \forall\alpha\, (\mathrm{Re}(\alpha, q, 1 \cdot \bot) \to \mathrm{Re}(0 \cdot \alpha, q_0, 0 \cdot \bot)) \\
& \to \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)
\end{aligned}$$

Лемма о сведе́нии проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^* \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$
$\varphi_{M,w} = \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}} \to \psi_f$; $\psi_0 = \mathrm{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)})$; $\psi_f = \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$
Halt$(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ **Valid**$(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w})$?

$(\Leftarrow)$ Пусть $\models \varphi_{M,w}$

Тогда формула $\varphi_{M,w}$ выполняется в такой интерпретации $\mathcal{I}$:

- предметная область — все ленточные слова и состояния МТ M
- значения термов устроены так, как это обсуждалось ранее
- $\overline{\mathrm{Re}}(t_\alpha, t_q, t_\beta) = \mathbb{t} \Leftrightarrow$
  тройка (t_α, t_q, t_β) соответствует достижимой конфигурации

Тогда верно $\mathcal{I} \models \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}}$:
«$\psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}}$» — это формульная запись определения достижимости

Значит, верно и $\mathcal{I} \models \psi_f$:
существует достижимая заключительная конфигурация

Лемма о сведе́нии проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^* \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

$\varphi_{M,w} = \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}} \to \psi_f$; $\psi_0 = \mathrm{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)})$; $\psi_f = \exists\alpha\,\exists\beta\,\mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

Halt$(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ **Valid**$(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w})$?

Прервёмся на **пример**: $\mathfrak{A} = \{0, 1\}$, $\Lambda = 0$, $\mathcal{Q} = \{q_0, q_f\}$, $w = 1011$,

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (1, L, q_f), \qquad \mathcal{P}(q_0, 1) = (0, R, q_0)$$

$\psi_0 = \mathrm{Re}(0 \cdot \bot, q_0, 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \bot)$

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{P}} = {} & \forall\alpha\,\forall \mathrm{x}\,\forall\beta\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{Re}(\mathrm{y} \cdot \mathrm{x} \cdot \alpha, q_0, 0 \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(\mathrm{x} \cdot \alpha, q_f, \mathrm{y} \cdot 1 \cdot \beta)) \\
& \&\, \forall\beta\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{Re}(\mathrm{y} \cdot \bot, q_0, 0 \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(0 \cdot \bot, q_f, \mathrm{y} \cdot 1 \cdot \beta)) \\
& \&\, \forall\alpha\,\forall\beta\,\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{Re}(\alpha, q_0, 1 \cdot \mathrm{x} \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(0 \cdot \alpha, q_0, \mathrm{x} \cdot \beta)) \\
& \&\, \forall\alpha\,(\mathrm{Re}(\alpha, q, 1 \cdot \bot) \to \mathrm{Re}(0 \cdot \alpha, q_0, 0 \cdot \bot))
\end{aligned}$$

Что можно извлечь из всех этих формул:

- $\psi_0, \psi_{\mathcal{P}} \models \psi_1$, где $\psi_1 = \mathrm{Re}(0 \cdot 0 \cdot \bot, q_0, 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \bot)$
- $\psi_1, \psi_{\mathcal{P}} \models \psi_2$, где $\psi_2 = \mathrm{Re}(0 \cdot \bot, q_f, 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \bot)$
- $\psi_2 \models \psi_f$ — а значит, и $\psi_0, \psi_{\mathcal{P}} \models \psi_f$

Эти рассуждения соответствуют устройству конечного вычисления M:

$(0, q_0, 10110) \to_M (00, q_0, 0110) \to_M (0, q_f, 01110)$ — заключительная конфигурация

Лемма о сведе́нии проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^* \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

$\varphi_{M,w} = \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}} \to \psi_f$; $\psi_0 = \mathrm{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)})$; $\psi_f = \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

Halt$(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ **Valid**$(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w})$?

($\Rightarrow$) Рассмотрим (конечное) вычисление M на w:

$$(\Lambda, q_0, w\Lambda) \to_M (\alpha_1, q_1, \beta_1) \to_M \cdots \to_M (\alpha_n, q_n, \beta_n);\ q_n = q_f$$

Справедливы следующие соотношения:

- $\psi_0, \psi_{\mathcal{P}} \models \mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_1, q_1, \beta_1)})$
- $\mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_1, q_1, \beta_1)}), \psi_{\mathcal{P}} \models \mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_2, q_2, \beta_2)})$
- $\ldots$
- $\mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_{n-1}, q_{n-1}, \beta_{n-1})}), \psi_{\mathcal{P}} \models \mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_n, q_f, \beta_n)})$

При этом $\mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_n, q_f, \beta_n)}) \models \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

С учётом транзитивности отношения $\models$ тогда верно $\psi_0, \psi_{\mathcal{P}} \models \psi_f$

По теореме о логическом следствии верно и $\models \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}} \to \psi_f$ ▼

Теорема Чёрча

Проблема общезначимости формул логики предикатов неразрешима

Доказательство.

По лемме о сведе́нии проблемы останова,
проблема останова МТ (**Halt**) m-сводится
к проблеме общезначимости формул логики предикатов (**Valid**)

Известно, что проблема **Halt** неразрешима

Значит, по следствию из теоремы об m-сводимости,
неразрешима и проблема **Valid** ▼