

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 37

Аксиоматические теории первого порядка
Проблема общезначимости формул в теории

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Вступление

Теорема. $1 + 1 = 2$

Попробуем применить логику для доказательства этого утверждения

« $1 + 1 = 2$ » — это **формула логики предикатов**, в которой

- ▶ 1 и 2 — константы
- ▶ $+$ ⁽²⁾ — функциональный символ
- ▶ $=$ ⁽²⁾ — предикатный символ

Символы 1, 2, +, = в теореме имеют *арифметический* смысл: числа 1 и 2, операция сложения и отношение равенства чисел

Попробуем записать этот смысл, используя логическую терминологию

Вступление

Теорема. $1 + 1 = 2$

Определение. 2 — это целое число, следующее за 1

$$\mathfrak{A}_2: 2 = \mathbf{s}(1)$$

$$(\llbracket \mathbf{s}(t) \rrbracket = \llbracket (t + 1) \rrbracket)$$

Определение. 1 — это целое число, следующее за 0

$$\mathfrak{A}_1: 1 = \mathbf{s}(0)$$

Определение. 0 — это ... *сейчас не потребуется*

Остановимся на такой сигнатуре: $\langle \{0, 1, 2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$

Операцию сложения чисел из \mathbb{N}_0 можно определить существенно разными способами, и в том числе так:

Определение. $+$ — это двуместная операция, обладающая следующими свойствами:

$$\mathfrak{A}_0^+: \forall x (x + 0 = x)$$

$$\mathfrak{A}_1^+: \forall x \forall y (x + \mathbf{s}(y) = \mathbf{s}(x + y)) \quad (\text{т.е. } x + (y + 1) = (x + y) + 1)$$

Вступление

Теорема. $1 + 1 = 2$

Про отношение равенства чисел из \mathbb{N}_0 прежде всего следует знать, что это **отношение эквивалентности**:

\mathfrak{A}_r^- : $\forall x (x = x)$ (рефлексивность)

\mathfrak{A}_s^- : $\forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (y = x))$ (симметричность)

\mathfrak{A}_t^- : $\forall x \forall y \forall z ((x = y) \& (y = z) \rightarrow (x = z))$ (транзитивность)

Отношения эквивалентности бывают разные, не только равенство чисел, поэтому придётся использовать и другие свойства равенства чисел — например, такие:

\mathfrak{A}_s^- : $\forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (s(x) = s(y)))$
(числа, следующие за равными, равны)

\mathfrak{A}_+^- : $\forall x \forall y \forall u \forall v ((x = u) \& (y = v) \rightarrow (x + y = u + v))$
(если числа в сумме заменить на равные, то получится равный результат)

Вступление

Теорема. $1 + 1 = 2$

Если принять упомянутые определения и свойства без доказательства, то обосновать теорему можно, например, так:

$$\mathfrak{A}_0^+ \quad \models \quad 1 + 0 = 1 \quad (\varphi_1)$$

$$\varphi_1, \mathfrak{A}_s^- \quad \models \quad \mathbf{s}(1 + 0) = \mathbf{s}(1) \quad (\varphi_2)$$

$$\mathfrak{A}_1^+ \quad \models \quad 1 + \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(1 + 0) \quad (\varphi_3)$$

$$\varphi_2, \varphi_3, \mathfrak{A}_t^- \quad \models \quad 1 + \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(1) \quad (\varphi_4)$$

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_r^-, \mathfrak{A}_+^- \quad \models \quad 1 + 1 = 1 + \mathbf{s}(0) \quad (\varphi_5)$$

$$\varphi_4, \varphi_5, \mathfrak{A}_t^- \quad \models \quad 1 + 1 = \mathbf{s}(1) \quad (\varphi_6)$$

$$\varphi_6, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_t^- \quad \models \quad 1 + 1 = 2 \quad (\varphi_7)$$

Следовательно, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0^+, \mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_r^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_t^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_+^- \models (1 + 1 = 2)$

И как это доказывает, что один плюс один — действительно два?

Вступление

$$\sigma = \langle \{0, 1, 2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$$

$$\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_0^+, \alpha_1^+, \alpha_r^-, \alpha_s^-, \alpha_t^-, \alpha_s^-, \alpha_+^-\}$$

$$\Gamma \models (1 + 1 = 2)$$

Рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} сигнатуры σ :

- ▶ предметная область — \mathbb{N}_0
- ▶ символы $0, 1, 2, \mathbf{s}, +, =$ оцениваются естественным образом

Если принять без доказательства, что \mathcal{I} — модель Γ ($\mathcal{I} \models \Gamma$),

то по определению логического следования

будет верно и $\mathcal{I} \models (1 + 1 = 2)$

При этом « $\mathcal{I} \models (1 + 1 = 2)$ » содержательно прочитывается так:

если символы $1, 2, +$ и $=$ имеют естественный арифметический смысл, то формула $(1 + 1 = 2)$ действительно верна (*выполняется*)

Вступление

$$\sigma = \langle \{0, 1, 2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=(2)\} \rangle$$

$$\Gamma = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0^+, \mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_r^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_t^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_+^-\} \quad \Gamma \models (1 + 1 = 2)$$

Сигнатурой σ задана совокупность понятий, которые допускается использовать в формулировке высказываний

Множеством Γ задан набор основных свойств понятий из σ , не требующих доказательства

(такие свойства нередко называют **аксиомами**, как аксиомы исчисления)

Формула $(1 + 1 = 2)$ — это высказывание, справедливость которого *обосновывается* с использованием аксиом (такие высказывания нередко называют **теоремами**)

Набор аксиом заданной сигнатуры, предназначенный для формулировки и доказательства теорем, в логике принято называть **аксиоматической теорией**

Если аксиомами и теоремами являются формулы логики предикатов первого порядка, то такую теорию принято называть

аксиоматической теорией первого порядка

Аксиоматические теории

Выберем сигнатуру σ алфавита логики предикатов

Аксиоматическая **теория** первого порядка \mathcal{T} сигнатуры σ — это множество предложений сигнатуры σ

Элементы (формулы) теории \mathcal{T} называются **аксиомами** этой теории

Логические следствия теории \mathcal{T} называются **теоремами** этой теории

Если теория ясна из контекста,
то будем *теоремы теории* называть просто *теоремами*

Аксиоматические теории

Формула φ

- ▶ **общезначима** в теории \mathcal{T} , если $\forall \tilde{x}^n \varphi(\tilde{x}^n)$ — теорема
 - ▶ Другое название: \mathcal{T} -общезначима
 - ▶ Обозначение: $\models_{\mathcal{T}} \varphi$
- ▶ **невыполнима** в теории \mathcal{T} , если формула $\neg\varphi$ \mathcal{T} -общезначима
 - ▶ Другое название: \mathcal{T} -невыполнима
 - ▶ Обозначение: $\not\models_{\mathcal{T}} \varphi^1$
- ▶ **выполнима** в теории \mathcal{T} , если она не является \mathcal{T} -невыполнимой
 - ▶ Другое название: \mathcal{T} -выполнима
 - ▶ Обозначение: $\models_{\mathcal{T}} \varphi^1$
- ▶ **необщезначима** в теории \mathcal{T} , если она не является \mathcal{T} -общезначимой
 - ▶ Другое название: \mathcal{T} -необщезначима
 - ▶ Обозначение: $\not\models_{\mathcal{T}} \varphi$

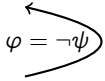
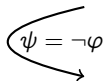
1 Как и раньше, это обозначение не общеизвестно, его придумал я, чтобы сэкономить место на слайдах

Аксиоматические теории

Как и для соответствующих свойств формул «не в теории», можно подробно рассмотреть только одно из них:

Утверждение

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -общезначима



предложение $\psi = \forall \tilde{x}^n \varphi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -общезначимо

формула $\psi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -невыполнима

$\varphi = \psi$ $\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \text{противоположный} \\ \text{ответ} \end{array} \right.$

предложение $\varphi = \exists \tilde{x}^n \psi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -невыполнимо

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -выполнима

предложение $\psi = \exists \tilde{x}^n \varphi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -выполнимо

Доказательство. Напрямую следует из определений \mathcal{T} -выполнимости, \mathcal{T} -невыполнимости и \mathcal{T} -общезначимости

Аксиоматические теории

Пример:

$$\sigma = \langle \{0, 1, 2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$$

\mathcal{I} — арифметическая интерпретация из вступительного примера

$$\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_0^+, \alpha_1^+, \alpha_r^-, \alpha_s^-, \alpha_t^-, \alpha_s^-, \alpha_+^-\}$$
$$\varphi = (1 + 1 = 2)$$

Γ — теория сигнатуры σ

$\models_{\Gamma} \varphi$, а значит, предложение φ является Γ -общезначимым

$\mathcal{I} \models \Gamma$, но $\mathcal{I} \not\models \neg\varphi$, а значит, $\Gamma \not\models \neg\varphi$, и следовательно,

- ▶ предложение $\neg\varphi$ не является Γ -общезначимым
- ▶ предложение φ не является Γ -невыполнимым
- ▶ предложение φ является Γ -выполнимым

$\models_{\Gamma} \neg\neg\varphi$, а значит,

- ▶ предложение $\neg\varphi$ является Γ -невыполнимым
- ▶ предложение $\neg\varphi$ не является Γ -выполнимым

Проблема общезначимости формул в теории \mathcal{T}

формулируется так:

для заданной формулы φ проверить,
является ли эта формула \mathcal{T} -общезначимой:

$$\models_{\mathcal{T}} \varphi ?$$