Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

Лекции по основам кибернетики

(вариант 2014 г., глава 4)

Москва 2014

Оглавление

Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкретное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно пытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно пытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюнктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

В четвертой главе изучаются эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывается полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В пятой главе представлены некоторые вопросы надежности и контроля схем (построение тестов для таблиц, синтез самокорректирующихся контактных схем).

Глава 4

Эквивалентные преобразования управляющих систем

§1 Задача эквивалентных преобразований схем на примере формул. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

Эквивалентные преобразования (ЭП), то есть преобразования, не изменяющие функционирования схем, играют важную роль при решении различных задач теории управляющих систем и, в частности, задачи синтеза схем (см. §1 главы 3). Следуя [**?**], изложим ряд вопросов ЭП схем из основных классов и рассмотрим сначала понятия, связанные с эквивалентными преобразованиями схем на основе тождеств на примере формул над базисом Б. Напомним, что некоторые ЭП формул базиса Б_0 уже использовались для раскрытия скобок и приведения подобных при построении сокращенной ДНФ (см. §3 главы 1), а также при оптимизации формул по глубине (см. §2).

Однократное ЭП формулы $\mathcal{F}$ в формулу $\check{\mathcal{F}}$ с помощью тождества t (см. §2) будем записывать в виде однократной выводимости вида $\mathcal{F} \underset{t}{\mapsto} \check{\mathcal{F}}$. Аналогичное ЭП $\mathcal{F}$ в $\widetilde{\mathcal{F}}$ в результате применения одного из тождеств системы τ (нескольких последовательных применений тождеств из τ) будем записывать в виде однократной (соответственно кратной) выводимости вида $\mathcal{F} \underset{\tau}{\mapsto} \widetilde{\mathcal{F}}$ (соответственно $\mathcal{F} \underset{\tau}{\models\!\!\!\Rightarrow} \widetilde{\mathcal{F}}$). При этом считается, что тождество

$$\widetilde{t}: \ \mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$$

выводится из системы тождеств τ, и этот факт записывается в виде выводимости $\tau \mapsto \widetilde{t}$ или $\tau \models\!\!\!\Rightarrow \widetilde{t}$ в зависимости от числа использованных переходов. Заметим, что в силу обратимости ЭП из выводимости $\mathcal{F} \underset{\tau}{\models\!\!\!\Rightarrow} \widetilde{\mathcal{F}}$ следует обратная выводимость $\widetilde{\mathcal{F}} \underset{\tau}{\models\!\!\!\Rightarrow} \mathcal{F}$. Система тождеств τ называется *полной* для ЭП формул над Б, если для любых двух эквивалентных формул $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ над Б имеет место выводимость $\mathcal{F}' \underset{\tau}{\models\!\!\!\Rightarrow} \mathcal{F}''$.

Рассмотрим, в частности, систему τ, которая состоит из тождеств де Моргана и тождества

$$t^{\text{ПК}}_{1,\&}: \ x_1\,(x_2 \vee \overline{x}_2) = x_1,$$

— тождества подстановки константы $1 = x_2 \vee \overline{x}_2$ в конъюнкцию (см. тождества (2.2) из главы 1). Пример ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}$ с помощью системы тождеств τ дает следующая цепочка выводимостей:

$$x_1\,(x_2x_3 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \underset{t^{\text{М}}_{\&}}{\mapsto} x_1\,(x_2x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}) \underset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\mapsto} x_1. \qquad (1.1)$$

Далее будем рассматривать только формулы над базисом Б_0, называя их просто формулами. Заметим, что имеют место (см., в частности, §2 главы 1, а также **??**) следующие тождества ассоциативности

$$t^{\text{А}}_{\circ}: \ x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3,$$

тождества коммутативности

$$t^{\text{К}}_{\circ}: \ x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_2$$

и тождества отождествления БП

$$t_{\circ}^{\text{ОП}}:\ x \circ x = x,$$

где $\circ\ \in\ \{\&, \vee\}$, тождества дистрибутивности «$\circ$» относительно «$\diamond$»

$$t_{\circ,\diamond}^{\mathrm{D}}:\ x_1 \circ (x_2 \diamond x_3) = (x_1 \circ x_2) \diamond (x_1 \circ x_3)$$

и тождества («правила») де Моргана

$$t_{\neg}^{\mathrm{M}}:\ \overline{(\overline{x}_1)} = x_1, \quad t_{\circ}^{\mathrm{M}}:\ \overline{(x_1 \circ x_2)} = (\overline{x}_1) \diamond (\overline{x}_2)\,,$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee)\,, (\vee, \&)\}$, тождества подстановки констант[1]

$$t_{0,\&}^{\text{ПК}} : x_1\,(x_2 \cdot \overline{x}_2) = x_2 \cdot \overline{x}_2, \quad t_{1,\&}^{\text{ПК}} : x_1\,(x_2 \vee \overline{x}_2) = x_1,$$
$$t_{0,\vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x}_2 = x_1, \qquad t_{1,\vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee (x_2 \vee \overline{x}_2) = x_2 \vee \overline{x}_2,$$

а также тождество поглощения

$$t^{\Pi}:\ x_1 \vee x_1 x_2 = x_1,$$

тождество обобщенного склеивания

$$t^{\text{ОС}}:\ x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

и другие.

Докажем, что

$$\left\{t_{\&}^{\mathrm{M}},\, t_{\neg}^{\mathrm{M}}\right\} \models \left\{t_{\vee}^{\mathrm{M}}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{t_{\&}^{\mathrm{K}},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models \left\{t_{\vee}^{\mathrm{K}}\right\},$$

где $\tau^{\mathrm{M}} = \left\{t_{\&}^{\mathrm{M}},\, t_{\neg}^{\mathrm{M}},\, t_{\vee}^{\mathrm{M}}\right\}$. Действительно,

$$\overline{x_1 \vee x_2} \underset{t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\models} \overline{\left(\overline{\overline{x}}_1\right) \vee \left(\overline{\overline{x}}_2\right)} \underset{t_{\&}^{\mathrm{M}}}{\mapsto} \overline{\overline{(\overline{x}_1) \cdot (\overline{x}_2)}} \underset{t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\mapsto} \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$$

[1]В отличие от тождеств (2.1)–(2.2) главы 1 данные тождества подстановки констант ориентированы на базис $Б_0$, где роль константы 0 (константы 1) играет формула вида $x_i \cdot \overline{x}_i$ (соответственно $x_i \vee \overline{x}_i$).

и

$$x_1 \vee x_2 \underset{t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\mapsto} \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} \underset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}}{\mapsto} \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} \underset{t_{\&}^{\mathrm{K}}}{\mapsto} \overline{\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1} \underset{t_{\&}^{\mathrm{M}},\, t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\models\!\!\!\Rightarrow} x_2 \vee x_1.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\left\{t_{\&}^{\mathrm{A}},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models\!\!\!\Rightarrow \left\{t_{\vee}^{\mathrm{A}}\right\},\ \left\{t_{\&}^{\mathrm{ОП}},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models\!\!\!\Rightarrow \left\{t_{\vee}^{\mathrm{ОП}}\right\},$$
$$\left\{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models\!\!\!\Rightarrow \left\{t_{\vee,\&}^{\mathrm{D}}\right\} \text{ и } \left\{t_{\sigma,\&}^{\mathrm{ПК}},\, \tau^{\mathrm{M}}\right\} \models\!\!\!\Rightarrow \left\{t_{\overline{\sigma},\vee}^{\mathrm{ПК}}\right\},$$

где $\sigma \in \{0,1\}$. Завершая примеры выводимостей, докажем, что

$$\left\{t_{1,\&}^{\mathrm{ПК}},\, t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}},\, t_{\vee}^{\mathrm{A}},\, t_{\vee}^{\mathrm{K}},\, t_{\vee}^{\mathrm{ОП}}\right\} \models\!\!\!\Rightarrow t^{\mathrm{П}}.$$

Действительно,

$$x_1 \vee x_1 x_2 \underset{t_{1,\&}^{\mathrm{ПК}}}{\mapsto} x_1 \left(x_2 \vee \overline{x}_2\right) \vee x_1 x_2 \underset{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\mapsto} x_1 \left(\left(x_2 \vee \overline{x}_2\right) \vee x_2\right)$$
$$\underset{t_{\vee}^{\mathrm{A}},t_{\vee}^{\mathrm{K}}}{\models\!\!\!\Rightarrow} x_1 \left(\left(x_2 \vee x_2\right) \vee \overline{x}_2\right) \underset{t_{\vee}^{\mathrm{ОП}}}{\mapsto} x_1 \left(x_2 \vee \overline{x}_2\right) \underset{t_{1,\&}^{\mathrm{ПК}}}{\mapsto} x_1.$$

Положим

$$\begin{aligned}
\tau^{\text{осн}} &= \left\{t_{\&}^{\mathrm{M}},\, t_{\neg}^{\mathrm{M}},\, t_{\&}^{\mathrm{A}},\, t_{\&}^{\mathrm{K}},\, t_{\&}^{\mathrm{ОП}},\, t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}},\, t_{1,\&}^{\mathrm{ПК}},\, t_{0,\&}^{\mathrm{ПК}}\right\},\\
\tau^{\mathrm{A}} &= \left\{t_{\&}^{\mathrm{A}},\, t_{\vee}^{\mathrm{A}}\right\},\\
\tau^{\mathrm{K}} &= \left\{t_{\&}^{\mathrm{K}},\, t_{\vee}^{\mathrm{K}}\right\},\\
\tau^{\mathrm{ОП}} &= \left\{t_{\&}^{\mathrm{ОП}},\, t_{\vee}^{\mathrm{ОП}}\right\},\\
\tau^{\mathrm{D}} &= \left\{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}},\, t_{\vee,\&}^{\mathrm{D}}\right\},\\
\tau^{\mathrm{ПК}} &= \left\{t_{0,\&}^{\mathrm{ПК}},\, t_{1,\&}^{\mathrm{ПК}},\, t_{0,\vee}^{\mathrm{ПК}},\, t_{1,\vee}^{\mathrm{ПК}}\right\},\\
\widetilde{\tau}^{\text{осн}} &= \left\{\tau^{\mathrm{M}},\, \tau^{\mathrm{A}},\, \tau^{\mathrm{K}},\, \tau^{\mathrm{ОП}},\, \tau^{\mathrm{D}},\, \tau^{\mathrm{ПК}},\, t^{\mathrm{П}}\right\}.
\end{aligned}$$

Систему $\tau^{\text{осн}}$ будем называть *системой основных тождеств*, а систему $\widetilde{\tau}^{\text{осн}}$ — *расширенной системой основных тождеств*. Рассмотренные выше примеры выводимостей доказывают следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Система* $\widetilde{\tau}^{\text{осн}}$ *выводима из системы* $\tau^{\text{осн}}$.

Покажем теперь, что с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ из любой формулы можно получить совершенную ДНФ или формулу $x_1\overline{x}_1$. Введем для этого некоторые понятия, характеризующие формулы, появляющиеся на промежуточных этапах указанного ЭП. Произвольную конъюнкцию букв, содержащую, в общем случае, повторяющиеся или противоположные буквы, будем называть *обобщенной* ЭК (ОЭК), а дизъюнкцию таких конъюнкций, содержащую, в общем случае, повторяющиеся «слагаемые», — обобщенной ДНФ (ОДНФ). Обычную ЭК (ДНФ) и формулу $x_1 \cdot \overline{x}_1$ будем считать *канонической* ОЭК (соответственно *канонической* ОДНФ), а совершенную ДНФ и формулу $x_1 \cdot \overline{x}_1$ — *совершенными* ОДНФ. Напомним (см. **??**), что формула, в которой все ФС $\neg$ применяются только к БП и нет двух последовательно применяемых ФС $\neg$, называется формулой с поднятыми отрицаниями.

Пусть формула $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ реализует ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$. Докажем существование ЭП вида

$$\mathcal{F} \underset{\tau^{\text{М}}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \mathcal{F}' \underset{\left\{t^{\text{D}}_{\&,\vee}, t^{\text{K}}_{\&}\right\}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \mathcal{F}'' \underset{\tau^{\text{ПП}}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \widehat{\mathcal{F}} \underset{\left\{t^{\text{D}}_{\&,\vee}, \tau^{\text{ПП}}\right\}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \widetilde{\mathcal{F}}, \tag{1.2}$$

где $\tau^{\text{ПП}} = \left\{\tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}, \tau^{\text{ПК}}, \tau^{\text{ОП}}, t^{\text{П}}\right\}$, $\mathcal{F}'$ — формула с поднятыми отрицаниями, $\mathcal{F}''$ — обобщенная ДНФ, а $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}$ — каноническая и совершенная ОДНФ ФАЛ f соответственно. Действительно, *поднятие отрицаний*, то есть переход от $\mathcal{F}$ к $\mathcal{F}'$ в (1.2) (см. **??**) можно осуществить применением тождеств $t^{\text{М}}_{\neg}$, $t^{\text{М}}_{\&}$ и $t^{\text{М}}_{\vee}$ к подформулам вида $\overline{\overline{(\mathcal{F}_1)}}$, $\overline{(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)}$ и $\overline{(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)}$ соответственно до тех пор, пока все такие подформулы не будут «устранены». Переход от $\mathcal{F}'$ к $\mathcal{F}''$ в (1.2), который называется *раскрытием скобок*, осуществляется применением тождеств $\left\{t^{\text{D}}_{\&,\vee}, t^{\text{K}}_{\&}\right\}$ к подформулам вида $\mathcal{F}_1 \cdot (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3)$ или

$(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cdot \mathcal{F}_3$ до тех пор, пока они встречаются в преобразуемой формуле.

Переход от $\mathcal{F}''$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ в (1.2), который называется *приведением подобных*, выполняется в три этапа. На первом этапе каждая ОЭК K'' из ОДНФ $\mathcal{F}''$ преобразуется в каноническую ОЭК K с помощью тождеств $\left\{t_{\&}^{\text{ОП}},\, t_{0,\&}^{\text{ПК}},\, t_{\&}^{\text{А}},\, t_{\&}^{\text{К}}\right\}$, а также тождества

$$x_i \cdot \overline{x}_i = x_1 \cdot \overline{x}_1, \tag{1.3}$$

которое выводится из них следующим образом:

$$x_i \cdot \overline{x}_i \underset{t_{0,\&}^{\text{ПК}}}{\mapsto} (x_1 \cdot \overline{x}_1) \cdot (x_i \cdot \overline{x}_i) \underset{t_{\&}^{\text{К}}}{\mapsto} (x_i \cdot \overline{x}_i) \cdot (x_1 \cdot \overline{x}_1) \underset{t_{0,\&}^{\text{ПК}}}{\mapsto} x_1 \cdot \overline{x}_1.$$

На втором этапе полученная формула $\check{\mathcal{F}}$ преобразуется в $\widehat{\mathcal{F}}$ путем «устранения» повторных вхождений равных элементарных конъюнкций или подформул $x_1 \cdot \overline{x}_1$ с помощью тождеств $\left\{\tau^{\text{А}},\, \tau^{\text{К}},\, t_{\vee}^{\text{ОП}}\right\}$ и, в случае $f \not\equiv 0$, последующего «устранения» ОЭК $x_1 \cdot \overline{x}_1$ с помощью тождеств $\left\{t_{\vee}^{\text{А}},\, t_{\vee}^{\text{К}},\, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}\right\}$.

Заметим, что первые два этапа приведения подобных, на которых происходит приведение повторений БП в ОЭК и ЭК, уже дают нам искомую формулу $\widehat{\mathcal{F}}$. Однако, для уменьшения числа шагов в последующих ЭП можно выполнить третий этап приведения подобных — этап приведения поглощений ЭК. На каждом шаге этого этапа в полученной ДНФ с помощью тождеств $\left\{\tau^{\text{А}},\, \tau^{\text{К}}\right\}$ выделяется подформула вида $K'' \vee K'' \cdot K$, где K'' и K — некоторые ЭК, а затем ЭК $K'' \cdot K$ «устраняется» с помощью ЭП

$$K'' \vee K'' \cdot K \underset{t^{\text{П}}}{\mapsto} K''.$$

Заметим также, что раскрытие скобок и различные этапы приведения подобных можно чередовать друг с другом при ЭП подформул формулы $\mathcal{F}'$ или формул $\mathcal{F}''$, $\widehat{\mathcal{F}}$.

Переход от $\widehat{\mathcal{F}}$ к $\widetilde{\mathcal{F}}$ в (1.2) выполняется в два этапа. Сначала каждая ЭК $\widehat{K}$ из $\widehat{\mathcal{F}}$, которая имеет ранг r, где $r = n - q <$

n, и не содержит букв БП $x_{i_1},\dots,x_{i_q}$, приводится к ее совершенной ДНФ $\widetilde{K}$ от БП $X(n)$ в результате следующего ЭП:

$$\widehat{K} \underset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\models\!\!\!\rightrightarrows} \widehat{K}\left(x_{i_1} \vee \overline{x}_{i_1}\right)\cdots\left(x_{i_q} \vee \overline{x}_{i_q}\right) \underset{t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\models\!\!\!\rightrightarrows} \widetilde{K}.$$

Затем в полученной ОДНФ устраняются повторные вхождения слагаемых так, как это делалось ранее при переходе от $\check{\mathcal{F}}$ к $\widehat{\mathcal{F}}$, и в результате мы приходим к совершенной ОДНФ $\widetilde{\mathcal{F}}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Любую формулу $\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n)$, реализующую ФАЛ f, с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.*

Рассмотрим описанные выше ЭП на примере формулы

$$\mathcal{F} = (x_1 \vee x_2)\cdot\overline{(x_1\cdot x_3)}\cdot(x_2 \vee x_3),$$

для которой

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F} \underset{t^{\text{M}}_{\&}}{\mapsto} (x_1 \vee x_2)\cdot(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3)\cdot(x_2 \vee x_3) && = \mathcal{F}',\\
&\mathcal{F}' \underset{\left\{t^{\text{D}}_{\&,\vee},\tau^{\text{ПП}}\setminus t^{\text{П}}\right\}}{\models\!\!\!\rightrightarrows} x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3 && = \check{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{F}},\\
&\widehat{\mathcal{F}} \underset{\{\tau^{\text{A}},\tau^{\text{K}},t^{\text{П}}\}}{\models\!\!\!\rightrightarrows} \overline{x}_1x_2 \vee x_2\overline{x}_3 && = \widehat{\mathcal{F}}',\\
&\widehat{\mathcal{F}}' \underset{\left\{t^{\text{D}}_{\&,\vee},\tau^{\text{ПП}}\right\}}{\models\!\!\!\rightrightarrows} x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 && = \widetilde{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

Теорема 1.1. *Система $\tau^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — эквивалентные формулы, реализующие равные ФАЛ f' и f'' соответственно, а набор $x(n) = x$ содержит все различные БП, встречающиеся в $\mathcal{F}'$

и $\mathcal{F}''$. Пусть, далее, ФАЛ $f(x)$ равна f' и f'', а $\widetilde{\mathcal{F}}$ — совершенная ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$. В силу леммы 1.2, имеет место ЭП

$$\mathcal{F}' \underset{\tau^{\text{осн}}}{\models\!\!\Rightarrow} \widetilde{\mathcal{F}} \underset{\tau^{\text{осн}}}{\models\!\!\Rightarrow} \mathcal{F}'',$$

которое доказывает теорему. □

§2 Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью эквивалентных преобразований формул. Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода

Распространим введенные в §1 понятия и обозначения на произвольный класс схем $\mathcal{U}$. В соответствии с определениями из §1 эквивалентность схем Σ' и Σ'' из $\mathcal{U}$ имеет место тогда и только тогда, когда Σ' и Σ'' реализуют равные системы (матрицы) ФАЛ. При этом, обычно, предполагается, что соответствующие друг другу полюса (выходы, входы) в Σ' и Σ'' имеют одинаковые пометки, а эквивалентность Σ' и Σ'' записывается в виде тождества

$$t: \ \Sigma' \sim \Sigma''.$$

Для схем из $\mathcal{U}$, как и для формул, определяется ряд «простейших» преобразований, сохраняющих эквивалентность схем, которые называются *подстановками.* Тождество

$$\widehat{t}: \ \widehat{\Sigma}' \sim \widehat{\Sigma}'',$$

которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$, называется *подстановкой тождества* t. Схема Σ' называется *подсхемой схемы* Σ, если

$$V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma), \qquad E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$$

и любая вершина v, $v \in V(\Sigma')$, которая либо относится к множеству входов (выходов) Σ, либо служит конечной (соответственно начальной) вершиной некоторого ребра из $E(\Sigma)\setminus E(\Sigma')$, является входом (соответственно выходом) Σ'.

Будем считать, что для схем из $\mathcal{U}$, как и для формул, имеет место принцип эквивалентной замены, то есть заменяя подсхему $\widehat{\Sigma}'$ схемы Σ эквивалентной ей схемой $\widehat{\Sigma}''$ мы получаем схему $\widetilde{\Sigma}$, которая эквивалентна схеме Σ. При этом все введенные в §1 для случая эквивалентных преобразований формул понятия (однократная и кратная выводимость, полнота системы тождеств и др.), а также связанные с ними обозначения переносятся на случай ЭП схем из $\mathcal{U}$ без изменений. Заметим, что вопрос о существовании конечной полной системы тождеств (КПСТ) является одним из основных вопросов, связанных с изучением ЭП схем из заданного класса $\mathcal{U}$.

Рассмотрим эти вопросы на примере ЭП СФЭ. Мы будем использовать все введенные выше общие понятия и определения, касающиеся ЭП схем, считая подстановкой СФЭ переименование (с возможным отождествлением) ее входных БП и переименование (с возможным дублированием и снятием[1]) ее выходных БП.

Напомним, что формулы представляют собой частный случай СФЭ, и для определенности будем считать, что любая формула $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$ является формулой-словом (см. §2), а соответствующую ей формулу-граф, т. е. квазидерево (см. **??**), будем обозначать через $\underline{\mathcal{F}}$. При этом тождеству $t: \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ —формулы из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, будет соответствовать тождество $\underline{t} : \underline{\mathcal{F}}' \sim \underline{\mathcal{F}}''$, где $\underline{\mathcal{F}}'$ и $\underline{\mathcal{F}}''$ — соответствующие $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ схемы из $\mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$, являющееся «схемным» аналогом тождества t. Множество СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, будем обозначать

[1]Под дублированием (снятием) выхода z_i СФЭ понимается нанесение на вершину с пометкой z_i еще одной выходной БП (соответственно удаление с неё пометки z_i)

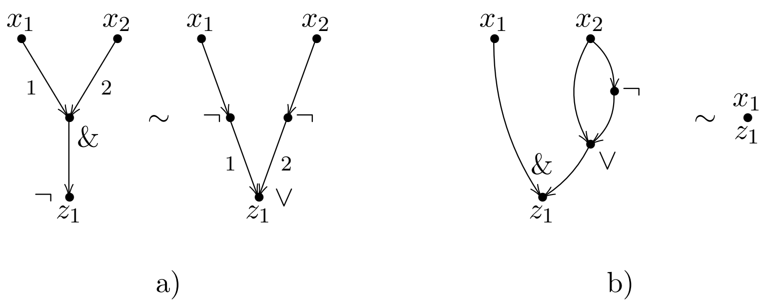

Рис. 2.1: тождества $\underline{t^{\mathrm{M}}_{\&}}$ и $\underline{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}$

через $\underline{\mathfrak{F}}$, а систему тождеств вида $\underline{t}$, где $t \in \tau$, а τ — система тождеств для $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, — через $\underline{\tau}$. Так, на рис. 2.1a и 2.1b приведены тождества $\underline{t^{\mathrm{M}}_{\&}}$ и $\underline{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}$, являющиеся схемными аналогами введенных выше формульных тождеств $t^{\mathrm{M}}_{\&}$ и $t^{\text{ПК}}_{1,\&}$.

На рис. 2.2a и 2.2b показаны тождество *ветвления* $t^{\mathrm{B}}_{\mathcal{E}_i}$ и тождество *снятия* $t^{\mathrm{C}}_{\mathcal{E}_i}$ *для функционального элемента* $\mathcal{E}_i$, $i \in [1, b]$, соответственно, а на рис. 2.2c — тождество *снятия входа* $t^{\mathrm{C}}_{\text{вх}}$. Заметим, что применение тождества снятия равносильно выполнению операции удаления висячей вершины соответствующего типа (см. §3). Заметим также, что тождества $t^{\mathrm{B}}_{\mathcal{E}_i}$, $t^{\mathrm{C}}_{\mathcal{E}_i}$, $t^{\mathrm{C}}_{\text{вх}}$ не являются аналогами формульных тождеств и положим

$$\tau^{\mathrm{B}}_{\text{Б}} = \left\{t^{\mathrm{B}}_{\mathcal{E}_i}\right\}_{i=1}^{b}, \qquad \tau^{\mathrm{C}}_{\text{Б}} = \left\{t^{\mathrm{C}}_{\mathcal{E}_i}\right\}_{i=1}^{b} \cup \left\{t^{\mathrm{C}}_{\text{вх}}\right\}.$$

Очевидно, что с помощью этих тождеств можно избавиться от всех висячих вершин и всех внутренних ветвлений, имеющихся в СФЭ. Следовательно, для любой СФЭ Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$, существует ЭП вида $\Sigma \underset{\{\tau^{\mathrm{C}}, \tau^{\mathrm{B}}\}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \underline{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ — формула (система формул) из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$.

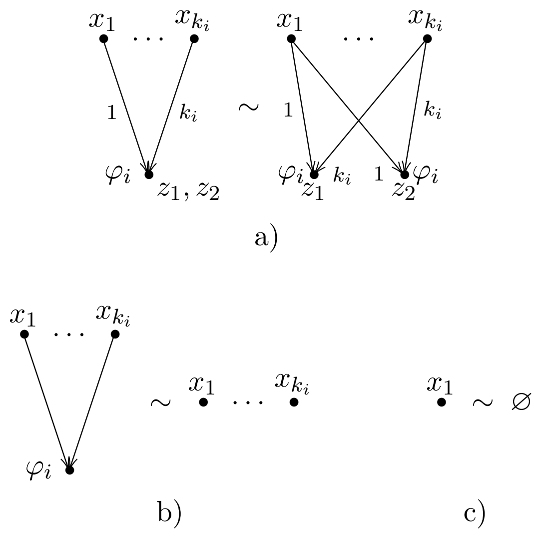

Рис. 2.2: тождества ветвления, снятия ФЭ и снятия входа

Пусть, далее, $\mathcal{F} \underset{t}{\mapsto} \widehat{\mathcal{F}}$ — однократное ЭП для формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, где тождество t имеет вид

$$t: \ \mathcal{F}'(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{F}''(x_1, \ldots, x_n),$$

а формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается из формулы $\mathcal{F}$ заменой подформулы $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ формулой $\mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$. Сопоставим этому ЭП «моделирующее» его однократное ЭП СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}} \underset{\underline{t}}{\mapsto} \widehat{\Sigma}$ (см. рис. 2.3). Заметим, что в том случае, когда формулы $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ являются бесповторными формулами, а БП $x_1, \ldots, x_n$ — их существенными БП, СФЭ $\widehat{\Sigma}$ совпадает с СФЭ $\underline{\mathcal{F}''}$. В остальных случаях из подформулы вида $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ формулы $\mathcal{F}$ необходимо с помощью тождеств $\tau^{\text{В}}_{\text{Б}}$ сформировать сначала подсхему $\underline{\mathcal{F}'}(\underline{\mathcal{F}_1}, \ldots, \underline{\mathcal{F}_n})$, а затем применить тождество $\underline{t}$. При этом в СФЭ $\widehat{\Sigma}$ могут появиться

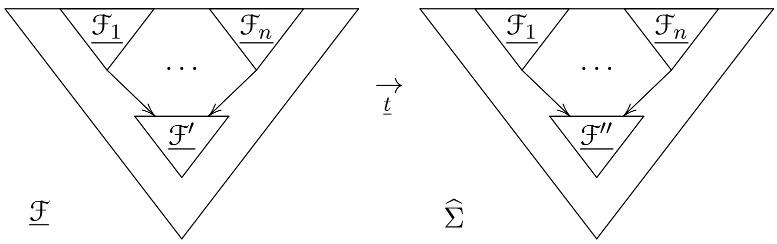

Рис. 2.3: моделирование ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

висячие вершины или внутренние «ветвления», и тогда для перехода от $\widehat{\Sigma}$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ необходимо провести ЭП вида $\widehat{\Sigma} \underset{\{\tau^{\mathrm{C}},\tau^{\mathrm{B}}\}}{\Mapsto} \widehat{\mathcal{F}}$. Следовательно, для любого ЭП вида $\mathcal{F} \underset{\tau}{\Mapsto} \widehat{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, существует моделирующее его ЭП вида

$$\underline{\mathcal{F}} \underset{\left\{\underline{\tau},\tau^{\mathrm{B}}_{\text{Б}},\tau^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\right\}}{\Mapsto} \underline{\widehat{\mathcal{F}}}.$$

На рис. 2.4 показано ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, которое моделирует ЭП (1.1) для формул из $\mathcal{U}^{\Phi}$:

$$x_1\left(x_2x_3 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3\right) \underset{t^{\mathrm{M}}_{\&}}{\mapsto} x_1\left(x_2x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}\right) \underset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\mapsto} x_1.$$

Из описанного выше способа «моделирования» ЭП формул с помощью ЭП СФЭ, а также способа перехода от формул к СФЭ и обратно на основе ЭП с помощью тождеств $\tau^{\mathrm{B}}_{\text{Б}}$, $\tau^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$ вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. *Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, то $\left\{\underline{\tau},\ \tau^{\mathrm{C}},\ \tau^{\mathrm{B}}\right\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$.*

Следствие. *Система тождеств $\left\{\underline{\tau}^{\text{осн}},\ \tau^{\mathrm{B}},\ \tau^{\mathrm{C}}\right\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$.*

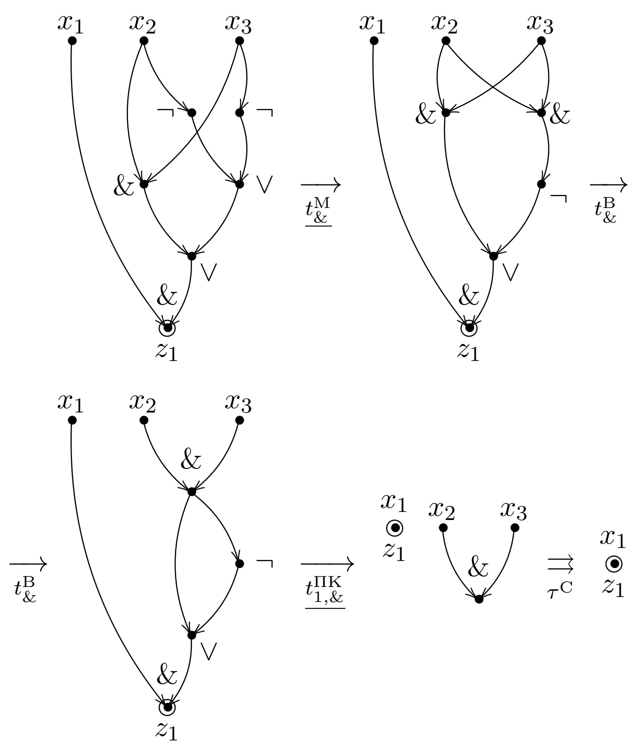

Рис. 2.4: пример моделирования ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

Рассмотрим далее вопросы структурного моделирования формул в различных базисах. Пусть помимо базиса Б $=$ $= \{\varphi_i\}_{i=1}^{b}$ у нас имеется другой конечный полный базис Б$' = \{\varphi_i'\}_{i=1}^{b'}$, и пусть формула $\Phi_i'\left(x_1, \ldots, x_{k_i'}\right)$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}'}^{\Phi}$, где $k_i' \geqslant k_i$, реализует ФАЛ φ_i, $i = 1, \ldots, b$. Заметим, что в случае $k_i' > k_i$ БП $x_{k_i+1}, \ldots, x_{k_i'}$ являются фиктивными БП формулы Φ_i'. Положим

$$\Phi' = \left(\Phi_1', \ldots, \Phi_b'\right), \qquad \Pi' = \left(\Pi_1', \ldots, \Pi_b'\right),$$

где Π_i' — тождество вида $\varphi_i = \Phi_i'$, $i = 1, \ldots, b$, и формулы из Φ' (тождества из Π') будем называть *формулами* (соответственно *тождествами*) *перехода от базиса* Б *к базису* Б$'$.

Для формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, обозначим через $\Pi'(\mathcal{F})$ формулу над базисом Б$'$, которая получается из $\mathcal{F}$ заменой каждой ее подформулы вида $\varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$ формулой $\Phi_i'\left(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i}, x_{k_i+1}, \ldots, x_{k_i'}\right)$, то есть является результатом подстановки формулы $\mathcal{F}_j$ вместо БП x_j в формулу Φ_i' для всех j, $j = 1, \ldots, k_i$. Переход от формулы $\mathcal{F}$ к формуле $\Pi'(\mathcal{F})$ будем называть *структурным моделированием формулы* $\mathcal{F}$ *в базисе* Б$'$ *на основе формул перехода* Φ' или, иначе, *на основе тождеств перехода* Π'. Заметим, что этот переход является специальным ЭП вида

$$\mathcal{F} \underset{\Pi'}{\models\!\!\Rightarrow} \Pi'(\mathcal{F})$$

для формул над базисом Б $\cup$ Б$'$. Отсюда следует, в частности, что в результате указанного структурного моделирования обеих частей тождества t, являющихся формулами из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, получается тождество t' для формул из $\mathcal{U}_{\text{Б}'}^{\Phi}$, которое мы будем обозначать через $\Pi'(t)$. Множество формул вида $\Pi'(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, будем обозначать через $\Pi'(\mathfrak{F})$, а множество тождеств вида $\Pi'(t)$, где $t \in \tau$ — тождество над $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, — через $\Pi'(\tau)$.

Рассмотрим теперь вопросы моделирования ЭП формул в базисе Б с помощью ЭП формул базиса Б$'$. Пусть $\Phi' = (\Phi'_1, \ldots, \Phi'_b)$ — система формул перехода от базиса Б к базису Б$'$, а $\Pi' = (\Pi'_1, \ldots, \Pi'_b)$ — система тождеств перехода, связанная с Φ'. Заметим, что любое ЭП для формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, имеющее вид

$$\mathcal{F} \underset{\tau}{\models\!\!\!\rightrightarrows} \widehat{\mathcal{F}}, \tag{2.1}$$

может быть «промоделировано» с помощью ЭП для формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$ вида

$$\mathcal{F}' \underset{\tau'}{\models\!\!\!\rightrightarrows} \widehat{\mathcal{F}}', \tag{2.2}$$

где $\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F})$, $\widehat{\mathcal{F}}' = \Pi'(\widehat{\mathcal{F}})$ и $\tau' = \Pi'(\tau)$. Действительно, пусть ЭП (2.1) является однократным ЭП на основе тождества t, $t \in \tau$, которое имеет вид

$$t: \ \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_q) = \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_q),$$

и пусть формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается в результате замены подформулы $\mathfrak{A}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_q)$ формулы $\mathcal{F}$ формулой $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_q)$. Тогда тождество $t' = \Pi'(t)$ имеет вид

$$t': \ \mathfrak{A}'(x_1, \ldots, x_1) = \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_q),$$

где $\mathfrak{A}' = \Pi'(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}' = \Pi'(\mathfrak{B})$, а формула $\widehat{\mathcal{F}}'$ может быть получена из формулы $\mathcal{F}'$ в результате замены ее подформулы $\mathfrak{A}'\left(\mathcal{F}'_1, \ldots, \mathcal{F}'_q\right)$, где $\mathcal{F}'_j = \Pi'(\mathcal{F}_j)$ для всех j, $j \in [1, q]$, формулой $\mathfrak{B}'\left(\mathcal{F}'_1, \ldots, \mathcal{F}'_q\right)$. Моделирование кратного ЭП вида (2.1) с помощью кратного ЭП вида (2.2) осуществляется путем последовательного моделирования однократных ЭП, составляющих ЭП (2.1).

Описанное выше моделирование позволяет выполнять ЭП для тех эквивалентных формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$, которые принадлежат множеству $\Pi'\left(\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}\right)$, то есть являются «моделями» формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, на основе системы тождеств $\Pi'(\tau)$, являющихся «моделями» тождеств из τ. Для того чтобы проводить ЭП для произвольных формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$ с использованием системы тождеств $\Pi'(\tau)$, выберем какую-либо систему формул перехода $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{b'})$ от базиса Б$'$ к базису Б и рассмотрим связанную с ней систему тождеств перехода $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_{b'})$. Пусть $\breve{\Pi}$ — система тождеств вида $\breve{\Pi} = \Pi'(\Pi)$ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$, которая получается в результате структурного моделирования правых частей тождеств из Π на основе системы тождеств Π'. Для произвольной формулы $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}'}$, положим

$$\breve{\Pi}\left(\mathcal{F}'\right) = \Pi'\left(\Pi\left(\mathcal{F}\right)\right)$$

и заметим, что

$$\mathcal{F}' \underset{\breve{\Pi}}{\models\!\!\!\Rightarrow} \breve{\mathcal{F}}' = \breve{\Pi}\left(\mathcal{F}'\right), \quad \breve{\mathcal{F}}' \in \Pi'\left(\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}\right).$$

В силу сказанного выше, отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.2 (теорема перехода)**.** *Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$, а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса* Б *к базису* Б$'$ *и от базиса* Б$'$ *к базису* Б *соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$.*

Следствие. *Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из $\mathcal{U}^{\Phi}$ (см. §3) указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе* Б.

Аналогичным образом на основе теоремы 2.1 решаются вопросы построения КПСТ для ЭП СФЭ в произвольном базисе.

§3 Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств

Рассмотрим вопросы ЭП для КС из $\mathcal{U}^{\text{К}}$ с неразделенными (бесповторными) полюсами. В соответствии с **??** эквивалентность КС $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ и $\Sigma'' = \Sigma''(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, то есть справедливость тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$ означает, что для любых i и j из отрезка $[1, m]$ ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ' равна ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ''. На рис. 3.1a–3.1e и 3.1f приведены пары эквивалентных КС, образующие тождества t_1–t_5 и $t_6^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, соответственно, которые мы будем называть *основными тождествами* для ЭП КС.

Определим подстановку для КС как переименование (с возможным отождествлением и инвертированием) БП, а также переименование (с возможным отождествлением и снятием) полюсов. Заметим, что применяя одну и ту же подстановку к двум эквивалентным КС, мы получим эквивалентные КС. Действительно, для переименования БП и переименования без отождествления полюсов это очевидно, а в случае отождествления полюсов эквивалентность получаемых КС вытекает из того, что матрица достижимости КС, являющейся результатом отждествления, однозначно определяется матрицей достижимости исходной КС. На рис. 3.2a (3.2b) показана подстановка $\widehat{t_4}$ тождества t_4 (соответственно $\widehat{t_5}$ тождества t_5), связанная с переименованием БП x_2 в x_1 (соответственно полюсов $1 = 3$ в 1).

Понятие подсхемы для КС из рассматриваемого класса определяется аналогично §5 с учетом неразделенности полюсов. Это означает, что для подсхемы Σ' КС Σ имеет место включение $V(\Sigma') \subset V(\Sigma)$ и $E(\Sigma') \in E(\Sigma)$, а полюсами Σ' являются все принадлежащие ей полюса КС Σи все те ее вершины, которые инцидентны в Σ ребрам из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$,

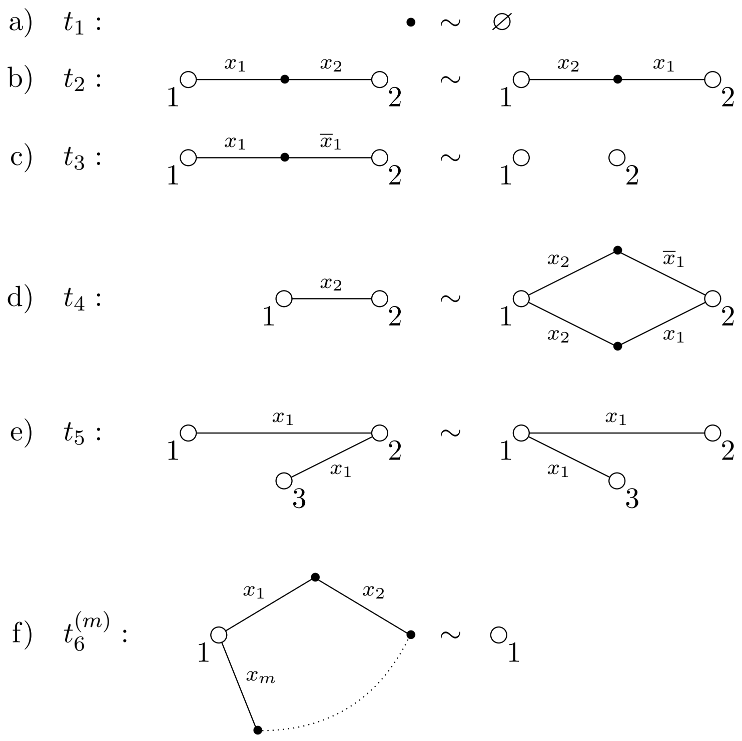

Рис. 3.1: основные тождества для КС

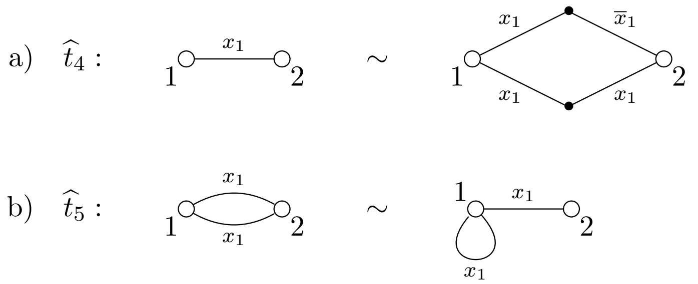

Рис. 3.2: подстановки для основных тождеств

и, возможно, некоторые другие вершины. При таком определении подсхемы для рассматриваемого класса КС будет выполняться принцип эквивалентной замены.

Рассмотрим примеры ЭП контактных схем с помощью системы основных тождеств. На рис. 3.3a–3.3e приведены тождества t_7–t_{11}, которые мы будем называть *вспомогательными.* Тождество t_{10} называют иногда тождеством замыкания по транзитивности, а тождество t_{11} — «леммой» о звезде.

Лемма 3.1. *Имеет место выводимость* $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \models\!\!\rightrightarrows \{t_7 - -t_{11}\}$.

Доказательство. Заметим, что выводимость $\{t_5, t_6^{(1)}\} \rightrightarrows t_7$ доказывается применением тождества $t_6^{(1)}$ к правой части тождества $\widehat{t}_5$ (см. рис. 3.2a) для удаления из нее «висячего» цикла длины 1. Выводимость тождеств t_8–t_{11} из основных тождеств $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\}$ показана на рис. 3.4–3.7 соответственно, где Σ_i и $\check{\Sigma}_i$ — левая и правая части тождества t_i, $i \in [8, 11]$. □

Обобщим тождества t_1–t_{11} на случай КС от БП $X(n)$, где $n \geqslant 2$. Для каждого i, $i \in [1, 2^n]$, сопоставим ЭК ви-

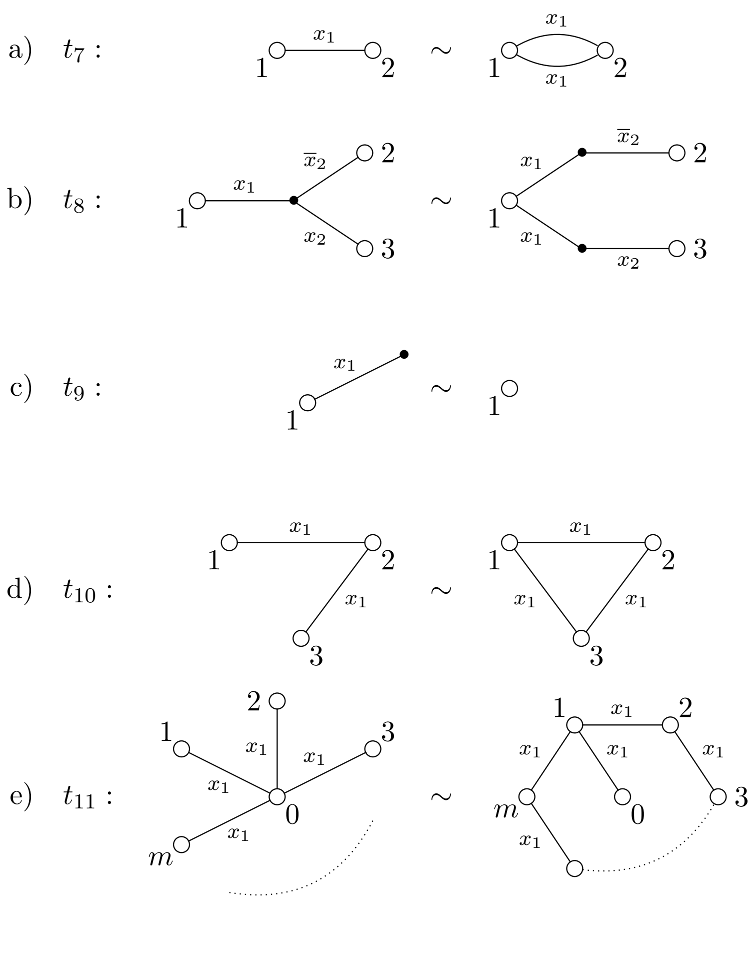

Рис. 3.3: вспомогательные тождества для КС

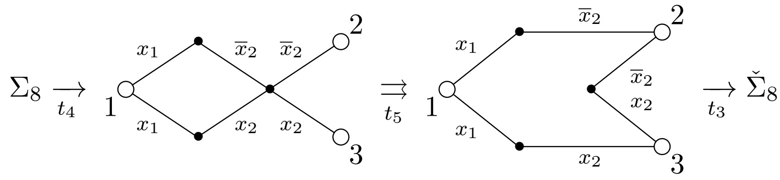

Рис. 3.4: вывод t_8

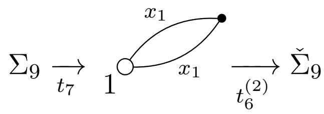

Рис. 3.5: вывод t_9

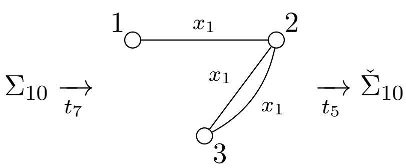

Рис. 3.6: вывод t_{10}

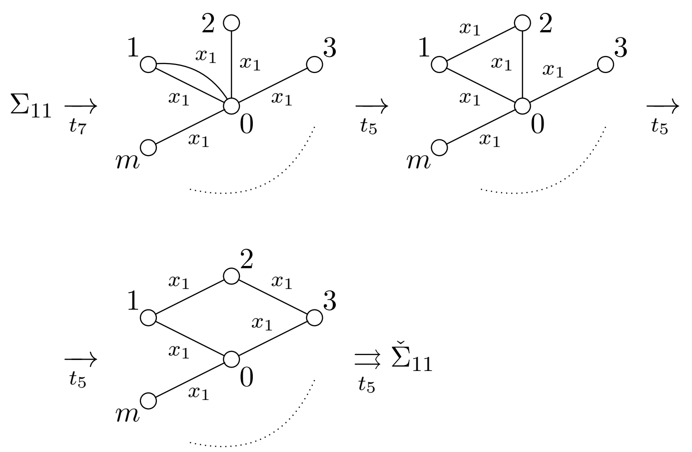

Рис. 3.7: вывод t_{11}

да $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = i - 1$, моделирующую ее цепочку $I_i^{(n)}$ (см. **??**), и пусть

$$\begin{aligned} I_i^{(n)} &= I_i, \quad i \in [1, 2^n], & I &= I_{2^n}; \\ I_i^{(n-1)} &= I_i', \quad i \in \left[1, 2^{n-1}\right], & I' &= I'_{2^{n-1}}; \\ I_i^{(n-2)} &= I_i'', \quad i \in \left[1, 2^{n-2}\right], & I'' &= I''_{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Систему тождеств $\tau^{(n)} = \left\{t_1^{(n)}, \ldots, t_{11}^{(n)}\right\}$, где $t_1^{(n)} = t_1$, $t_6^{(n)}$ — соответствующее основное тождество (см. рис. 3.1f), $t_2^{(n)}$ — система, состоящая из тождеств, показанных на рис. 3.8a, где $\widetilde{I}$ — произвольная перестановка цепочки I, а остальные тождества приведены на рис. 3.8b—3.8i, будем называть системой *обобщенных тождеств порядка* n. При этом система $\tau_n = \left\{t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, \ldots, t_6^{(n)}\right\}$ считается системой основных тождеств порядка n, а система всех основных тождеств обозначается через τ_∞.

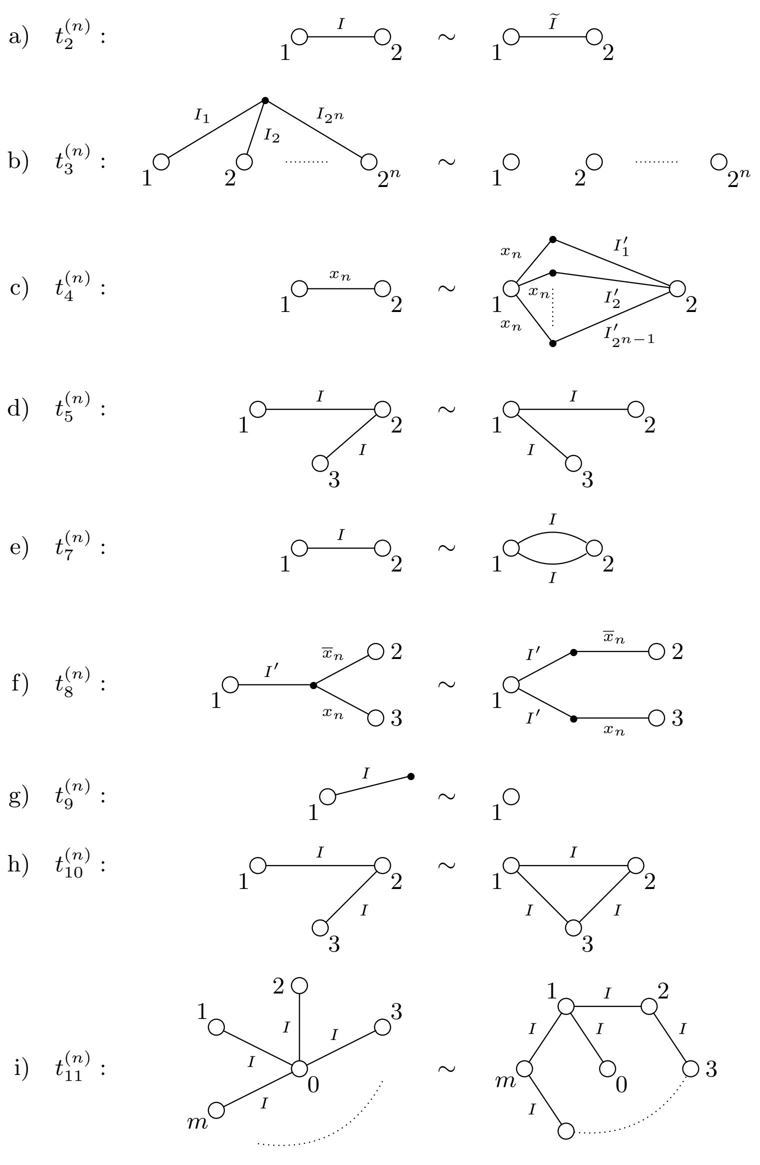

Рис. 3.8: обобщенные тождества порядка n для КС

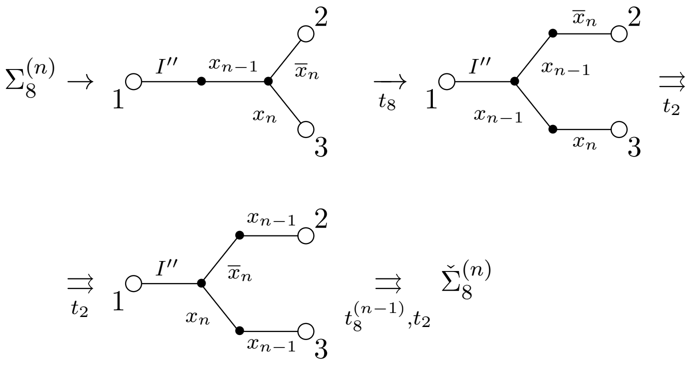

Рис. 3.9: вывод $t_8^{(n)}$

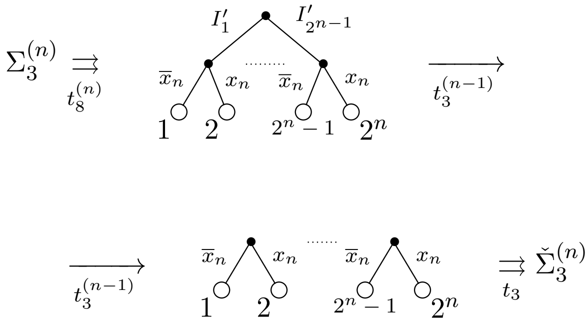

Рис. 3.10: вывод $t_3^{(n)}$

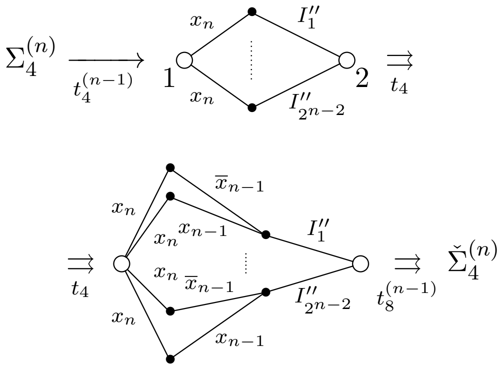

Рис. 3.11: вывод $t_4^{(n)}$

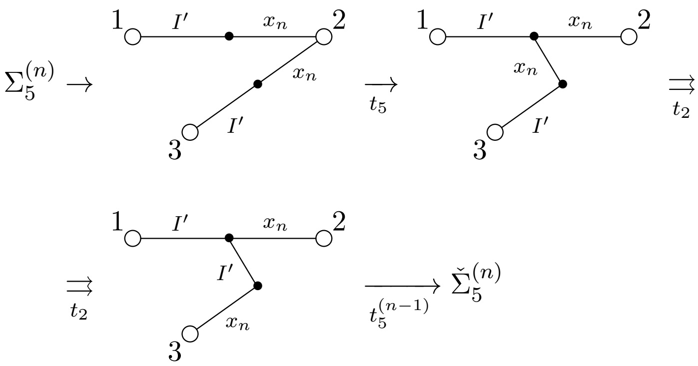

Рис. 3.12: вывод $t_5^{(n)}$

Лемма 3.2. *При* $n \geqslant 2$ *имеет место выводимость* $\tau_n \rightrightarrows \tau^{(n)}$.

Доказательство. Отметим сначала следующие очевидные выводимости:

$$\{t_2\} \rightrightarrows t_2^{(n)}, \qquad \{t_9\} \rightrightarrows t_9^{(n)}.$$

Выводимость $\tau_n \rightrightarrows t_i^{(n)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, докажем индукцией по n, $n \geqslant n_i$, где $n_3 = n_5 = 1$ и $n_8 = n_4 = 2$. Базис этой индукции составляет тождество $t_i = t_i^{(n_i)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, а обоснование индуктивного перехода дает выводимость правой части $\check{\Sigma}_i^{(n)}$ тождества $t_i^{(n)}$, $n > n_i$, из его левой части $\Sigma_i^{(n)}$, показанная на рис. 3.9–3.12.

Легко видеть, что выводимости

$$\left\{t_2^{(n)}, t_5^{(n)}\right\} \rightrightarrows t_7^{(n)}, \qquad \left\{t_7^{(n)}, t_5^{(n)}\right\} \rightrightarrows \left\{t_{10}^{(n)}, t_{11}^{(n)}\right\}$$

при $n \geqslant 2$ доказываются аналогично тому, как это делалось для случая $n = 1$ (см. рис. 3.6, 3.7).

Лемма доказана. □

§4 Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Докажем сначала полноту системы основных тождеств τ_∞ для ЭП КС. Для этого, как обычно, достаточно доказать, что с помощью ЭП на основе системы τ_∞ произвольную КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ можно привести к каноническому виду. Напомним (см. **??**), что каноническая КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, или, иначе, *каноническая КС порядка* n, представляет собой объединение канонических $(1,1)$-КС вида $\widehat{\Sigma}_{ij}(x_1, \ldots, x_n; a_i, a_j)$, построенных на основе совершенных ДНФ ФАЛ проводимости от a_i к a_j для всех i и j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Любую цепь $I_i^{(n)}$ (см. §3), где $i \in [1, 2^n]$, а также любую цепь, которая получается из $I_i^{(n)}$ перестановкой контактов, будем называть *канонической цепью порядка* n. Заметим, что КС $\widehat{\Sigma}\,(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ является канонической КС порядка n тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

1. любой контакт $\widehat{\Sigma}$ принадлежит некоторой канонической цепи порядка n, являющейся подсхемой схемы $\widehat{\Sigma}$, причем полюсами этой подсхемы служат только концевые вершины данной цепи;

2. любая внутренняя вершина $\widehat{\Sigma}$ является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта 1;

3. в КС $\widehat{\Sigma}$ отсутствуют «висячие циклы» (см. тождество $t_6^{(n)}$) и «параллельные» цепи, то есть канонические цепи порядка n из пункта 1, которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК;

4. в КС $\widehat{\Sigma}$ нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_t (см. рис. 4.1a), влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей полюс a_j с полюсом a_t (см. рис. 4.1b).

Лемма 4.1. *Для любой КС* Σ*, где* $\Sigma \in \mathcal{U}^{\text{К}}$ *и* $\Sigma = \Sigma\,(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$*, и любой эквивалентной* Σ *КС* $\widehat{\Sigma}\,(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ *канонического вида существует ЭП* $\Sigma \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}$.

Доказательство. Построим ЭП вида

$$\Sigma \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma_1 \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma_2 \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma_3 \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma_4 = \widehat{\Sigma},$$

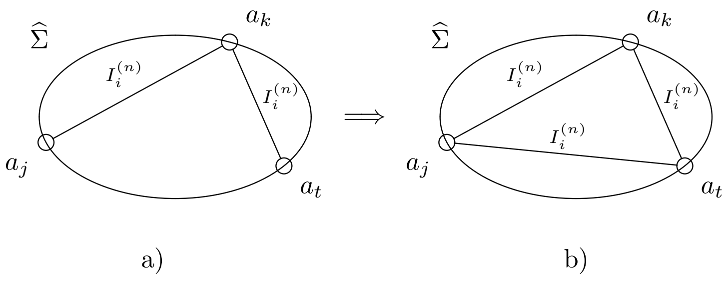

Рис. 4.1: к свойству 4 КС канонического вида

где КС $\Sigma_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, обладает отмеченными выше свойствами $1, \ldots, i$, отличающими канонические КС. Первое из этих ЭП имеет вид

$$\Sigma \underset{t_4^{(n)}}{\rightrightarrows} \Sigma_1$$

и связано с применением к каждому контакту тождества $t_4^{(n)}$.

Существование ЭП

$$\Sigma_1 \underset{\left\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\right\}}{\rightrightarrows} \Sigma_2 \tag{4.1}$$

докажем индукцией по числу тех внутренних вершин КС Σ_1, которые не являются внутренними вершинами ее канонических цепей. Базис индукции составляют схемы Σ_1, которые не имеют указанных вершин и для которых, следовательно, $\Sigma_2 = \Sigma_1$. Пусть теперь КС Σ_1 имеет хотя бы одну вершину указанного вида и пусть v — одна из таких вершин. Удалим с помощью тождества $t_6^{(n)}$ все присоединенные к v «висячие» циклы и рассмотрим все остальные цепи $C_1, \ldots, C_q$, концевой вершиной которых она является (см. рис. 4.2a). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для некоторых натуральных чисел

$$a_1 = 1 < a_2 < \cdots < a_p < a_{p+1} = q + 1$$

и любого j, $j \in [1,p]$, цепи $C_{a_j}, \ldots, C_{a_{j+1}-1}$ являются цепями типа $I_{i_j}^{(n)} = I_{i_j}$, где $i_1, \ldots, i_p$ — различные числа отрезка $[1, 2^n]$. Применяя к каждой из этих p групп цепей одного типа тождество $t_{11}^{(n)}$, получим КС Σ_1', в которой из вершины v выходит по одной цепи каждого типа I_{i_j}, $j \in [1,p]$ (см. рис. 4.2b). Пусть, далее, КС Σ_1'' получается из КС Σ_1' присоединением к вершине v с помощью тождества $t_9^{(n)}$ «висячих» цепей $C_{p+1}, \ldots, C_{2^n}$ всех отсутствующих среди $I_{i_1}, \ldots, I_{i_p}$ типов (см. рис. 4.2c), а КС Σ_1''' получается из КС Σ_1'' в результате удаления с помощью тождества $t_3^{(n)}$ вершины v вместе со всеми «инцидентными» ей цепями и устранения с помощью тождества t_1 образовавшихся при этом изолированных вершин — концевых вершин цепей $C_{p+1}, \ldots, C_{2^n}$ (см. рис. 4.2d). По индуктивному предположению для КС Σ''' существует ЭП вида

$$\Sigma''' \underset{\left\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\right\}}{\rightrightarrows} \Sigma_2$$

и, следовательно, для КС Σ_1 существует ЭП (4.1).

Переход от КС Σ_2 к КС Σ_3 осуществляется с помощью тождеств $t_6^{(n)}$ и $t_7^{(n)}$, а от КС Σ_2 к КС Σ_3 — с помощью тождеств $t_{10}^{(n)}$.

Лемма доказана. □

Теорема 4.1. *Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП $x_1, \ldots, x_n$ существует ЭП вида $\Sigma' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma''$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ — канонические КС от БП $x_1, \ldots, x_n$, эквивалентные КС Σ' и Σ'' соответственно. Из определений следует, что $\widehat{\Sigma}' \underset{t_2^{(n)}}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}''$, и поэтому, в силу леммы 4.1, существует ЭП вида

$$\Sigma' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}' \underset{t_2^{(n)}}{\rightrightarrows} \widehat{\Sigma}'' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma''.$$

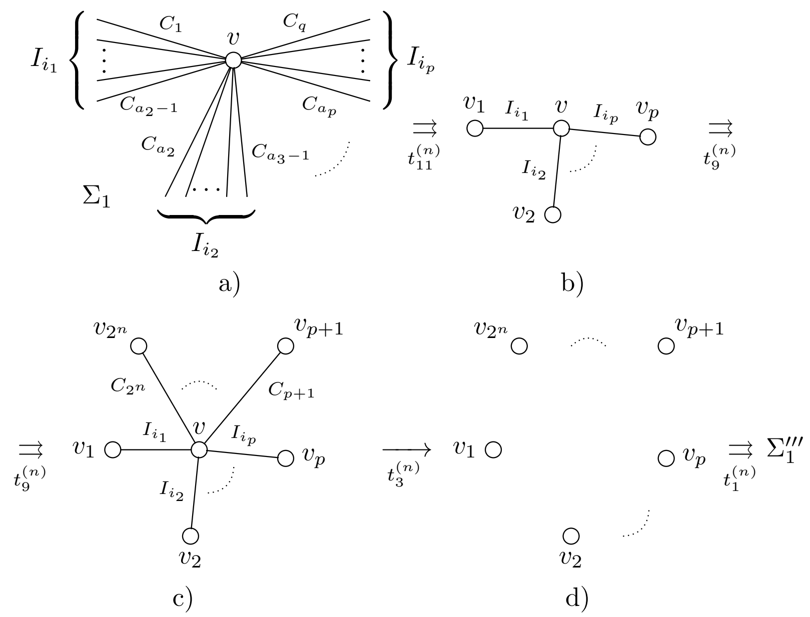

Рис. 4.2: к доказательству леммы 4.1

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ от БП $x_1, \ldots, x_n$.*

Следствие 2. *Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$.*

Докажем теперь отсутствие КПСТ в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$. Для КС Σ от БП $x_1, \ldots, x_n$ и набора α, $\alpha \in B^n$, определим величину

$$\Theta(\Sigma, \alpha) = |E(\Sigma|_\alpha)| - |V(\Sigma|_\alpha)| + |c(\Sigma|_\alpha)|,$$

которая (см. **??**) задает цикломатическое число графа $\Sigma|_\alpha$.

Положим, далее,

$$\Theta(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} \Theta(\Sigma, \alpha).$$

Лемма 4.2. *Если* $\Sigma'(x_1, \ldots, x_n) \underset{\{t_1 - t_5\}}{\rightrightarrows} \Sigma''(x_1, \ldots, x_n)$, *то* $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, *а если* $\Sigma' \underset{\tau_k}{\rightrightarrows} \Sigma''$, *где* $k < n$, *то* $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ *делится на* 2^{n-k}.

Доказательство. Докажем, что $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, если $\Sigma' \underset{t_i}{\rightarrow} \Sigma''$ для любого i из отрезка $[1, 5]$. Действительно, пусть КС Σ'' получается из КС Σ' заменой ее подсхемы $\widehat{\Sigma}'_i$, которая имеет вид левой части тождества t_i, на соответствующую ей правую часть $\widehat{\Sigma}''_i$ этого тождества. Нетрудно проверить, что для любого i, $i \in [1, 5]$, число линейно независимых циклов графов $\Sigma|_{\alpha'}$ и $\Sigma|_{\alpha''}$ одинаково при всех α, $\alpha \in B^n$, и, следовательно, $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$.

Пусть теперь $\Sigma' \underset{\tau_k}{\rightrightarrows} \Sigma''$, причем $k < n$. Если КС Σ' содержит в качестве подсхемы цикл из k контактов с одним полюсом, то КС Σ'' содержит вместо него один лишь полюс. Рассмотрим цикломатическое число сети $\Sigma'|_\alpha$ для различных $\alpha, \alpha \in B^n$. Если цикл указанного вида в КС Σ' содержит контакты, помеченные различными буквами одной и той же БП, то, очевидно, для любого α, $\alpha \in B^n$, $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 0$. В противном случае, пусть $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ — все различные БП, встречающиеся среди пометок указанного цикла, причем $m \leqslant k$. Заметим, что если цикл проводит на наборе α, $\alpha \in B^n$, то он проводит и на всех 2^{n-m} наборах, в которых значения переменных с индексами $j_1, \ldots, j_m$ совпадают со значениями соответствующих переменных набора α. Таким образом, разность

$$\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \left(\Theta(\Sigma'|_\alpha) - \Theta(\Sigma''|_\alpha)\right)$$

делится на 2^{n-m} и, следовательно, делится на 2^{n-k}

Лемма доказана. $\square$

Теорема 4.2. *В классе* $\mathcal{U}^{\text{К}}$ *не существует конечной полной системы тождеств.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного: пусть τ — КПСТ для ЭП КС $\mathcal{U}^{\text{К}}$, и пусть n — максимальное число БП, встречающихся в тождествах системы τ. Тогда $\tau_n \rightrightarrows \tau$ и τ_n — КПСТ для $\mathcal{U}^{\text{К}}$. Докажем, что $\tau_n \not\rightrightarrows t_6^{(n+1)}$. Для этого рассмотрим КС Σ', состоящую из простого цикла длины $(n+1)$, содержащего контакты с пометками x_i, $i \in [1, n+1]$, и имеющую единственный полюс с пометкой 1, которая является левой частью тождества $t_6^{(n+1)}$. Очевидно, что ей эквивалентна КС Σ'', содержащая изолированный полюс 1, которая является правой частью тождества $t_6^{(n+1)}$. Если $\tau_n \rightrightarrows t_6^{(n+1)}$, то $\Sigma' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma''$. Согласно данным выше определениям, $\Theta\left(\Sigma'\right) = 1$, $\Theta\left(\Sigma''\right) = 0$ и разность $\Theta\left(\Sigma'\right) - \Theta\left(\Sigma''\right) = 1$ не делится на 2, что противоречит утверждению леммы 4.2. Таким образом, тождество $t_6^{(n+1)}$ не выводится из системы τ_n, а значит, и из системы τ. Отсюда следует, что τ не может являться КПСТ для ЭП КС из класса $\mathcal{U}^{\text{К}}$.

Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.

[2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.

[3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.

[4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.

[5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.

[7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.

[8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

[9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.

[10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5-44.

[11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39

[12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.

[13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.

[14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

[15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.

[16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.

[17] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.

// Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.

[18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.

[19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.

[20] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

[21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.

[22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.

[23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.

[24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.

[25] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.

[26] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.

[27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИ АН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.

[28] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.

[29] *Яблонский С. В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.

[30] *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.

[31] *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.

[32] *Cardot C.* Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.

[33] *Shannon C. E.* The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).

[34] *Wegener I.* Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.