

Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

# ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

(вариант 2014 г., глава 4)

Москва 2014

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>4 Надежность и контроль управляющих систем</b>	<b>6</b>
§1 Задача эквивалентных преобразований схем на примере формул. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$ . . . . .	6
§2 Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью формульных преобразований. Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода . . . . .	13
§3 Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств . . . . .	22
§4 Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем . . . . .	31
<b>Литература</b>	<b>38</b>

## Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкрет-

ное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно попытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно попытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюн-

ктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

В четвертой главе изучаются эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывается полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В пятой главе представлены некоторые вопросы надежности и контроля схем (построение тестов для таблиц, синтез самокорректирующихся контактных схем).

## Глава 4

### Эквивалентные преобразования управляющих систем

#### §1 Задача эквивалентных преобразований схем на примере формул. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

Эквивалентные преобразования (ЭП), то есть преобразования, не изменяющие функционирования схем, играют важную роль при решении различных задач теории управляющих систем и, в частности, задачи синтеза схем (см. §1 главы 3). Следуя [?], изложим ряд вопросов ЭП схем из основных классов и рассмотрим сначала понятия, связанные с эквивалентными преобразованиями схем на основе тождеств на примере формул над базисом  $B$ . Напомним, что некоторые ЭП формул базиса  $B_0$  уже использовались для раскрытия скобок и приведения подобных при построении сокращенной ДНФ (см. §3 главы 1), а также при оптимизации формул по глубине (см. §2).

Однократное ЭП формулы  $\mathcal{F}$  в формулу  $\check{\mathcal{F}}$  с помощью тождества  $t$  (см. §2) будем записывать в виде однократной выводимости вида  $\mathcal{F} \xrightarrow{t} \check{\mathcal{F}}$ . Аналогичное ЭП  $\mathcal{F}$  в  $\tilde{\mathcal{F}}$  в результате применения одного из тождеств системы  $\tau$  (нескольких последовательных применений тождеств из  $\tau$ ) будем записывать в виде однократной (соответственно кратной) выво-

димости вида  $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$  (соответственно  $\mathcal{F} \stackrel{\tau}{\vdash} \tilde{\mathcal{F}}$ ). При этом считается, что тождество

$$\tilde{t} : \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$$

выводится из системы тождеств  $\tau$ , и этот факт записывается в виде выводимости  $\tau \mapsto \tilde{t}$  или  $\tau \stackrel{\tau}{\vdash} \tilde{t}$  в зависимости от числа использованных переходов. Заметим, что в силу обратимости ЭП из выводимости  $\mathcal{F} \stackrel{\tau}{\vdash} \tilde{\mathcal{F}}$  следует обратная выводимость  $\tilde{\mathcal{F}} \stackrel{\tau}{\vdash} \mathcal{F}$ . Система тождеств  $\tau$  называется *полной* для ЭП формул над  $\mathcal{B}$ , если для любых двух эквивалентных формул  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  над  $\mathcal{B}$  имеет место выводимость  $\mathcal{F}' \stackrel{\tau}{\vdash} \mathcal{F}''$ .

Рассмотрим, в частности, систему  $\tau$ , которая состоит из тождеств де Моргана и тождества

$$t_{1,\&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1,$$

— тождества подстановки константы  $1 = x_2 \vee \bar{x}_2$  в конъюнкцию (см. тождества (2.2) из главы 1). Пример ЭП формул из  $\mathcal{U}^\Phi$  с помощью системы тождеств  $\tau$  дает следующая цепочка выводимостей:

$$x_1 (x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \xrightarrow[t_{\&}^{\text{M}}]{} x_1 (x_2 x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}) \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1. \quad (1.1)$$

Далее будем рассматривать только формулы над базисом  $\mathcal{B}_0$ , называя их просто формулами. Заметим, что имеют место (см., в частности, §2 главы 1, а также ??) следующие тождества ассоциативности

$$t_{\circ}^{\text{A}} : x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3,$$

тождества коммутативности

$$t_{\circ}^{\text{K}} : x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$$

8Глава 4. Эквивалентные преобразования управляющих систем

и тождества отождествления БП

$$t_{\circ}^{\text{ОП}} : x \circ x = x,$$

где  $\circ \in \{\&, \vee\}$ , тождества дистрибутивности « $\circ$ » относительно « $\diamond$ »

$$t_{\circ, \diamond}^{\text{D}} : x_1 \circ (x_2 \diamond x_3) = (x_1 \circ x_2) \diamond (x_1 \circ x_3)$$

и тождества («правила») де Моргана

$$t_{\neg}^{\text{M}} : \overline{(\bar{x}_1)} = x_1, \quad t_{\circ}^{\text{M}} : \overline{(x_1 \circ x_2)} = (\bar{x}_1) \diamond (\bar{x}_2),$$

где  $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$ , тождества подстановки констант<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} t_{0, \&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \cdot \bar{x}_2) = x_2 \cdot \bar{x}_2, & \quad t_{1, \&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1, \\ t_{0, \vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_2 = x_1, & \quad t_{1, \vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_2 \vee \bar{x}_2, \end{aligned}$$

а также тождество поглощения

$$t^{\text{П}} : x_1 \vee x_1 x_2 = x_1,$$

тождество обобщенного склеивания

$$t^{\text{ОС}} : x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

и другие.

Докажем, что

$$\{t_{\&}^{\text{M}}, t_{\neg}^{\text{M}}\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^{\text{M}}\} \quad \text{и} \quad \{t_{\&}^{\text{K}}, \tau^{\text{M}}\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^{\text{K}}\},$$

где  $\tau^{\text{M}} = \{t_{\&}^{\text{M}}, t_{\neg}^{\text{M}}, t_{\vee}^{\text{M}}\}$ . Действительно,

$$\overline{x_1 \vee x_2} \xrightarrow[t_{\neg}^{\text{M}}]{\Leftrightarrow} \overline{(\bar{x}_1) \vee (\bar{x}_2)} \xrightarrow[t_{\&}^{\text{M}}]{\Leftrightarrow} \overline{(\bar{x}_1) \cdot (\bar{x}_2)} \xrightarrow[t_{\neg}^{\text{M}}]{\Leftrightarrow} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$$

<sup>1</sup>В отличие от тождеств (2.1)–(2.2) главы 1 данные тождества подстановки констант ориентированы на базис  $B_0$ , где роль константы 0 (константы 1) играет формула вида  $x_i \cdot \bar{x}_i$  (соответственно  $x_i \vee \bar{x}_i$ ).



и

$$x_1 \vee x_2 \xrightarrow[t_{\neg}^M]{\overline{\overline{x_1 \vee x_2}}} \xrightarrow[t_{\vee}^M]{\overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}} \xrightarrow[t_{\&}^K]{\overline{\overline{x_2} \cdot \overline{x_1}}} \stackrel{\vdash}{=} x_2 \vee x_1.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\begin{aligned} \{t_{\&}^A, \tau^M\} &\stackrel{\vdash}{=} \{t_{\vee}^A\}, \quad \{t_{\&}^{\text{ОП}}, \tau^M\} \stackrel{\vdash}{=} \{t_{\vee}^{\text{ОП}}\}, \\ \{t_{\&,\vee}^D, \tau^M\} &\stackrel{\vdash}{=} \{t_{\vee,\&}^D\} \quad \text{и} \quad \{t_{\sigma,\&}^{\text{ПК}}, \tau^M\} \stackrel{\vdash}{=} \{t_{\sigma,\vee}^{\text{ПК}}\}, \end{aligned}$$

где  $\sigma \in \{0, 1\}$ . Завершая примеры выводимостей, докажем, что

$$\{t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&,\vee}^D, t_{\vee}^A, t_{\vee}^K, t_{\vee}^{\text{ОП}}\} \stackrel{\vdash}{=} t^{\Pi}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_1 x_2 &\xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{\overline{\overline{x_1 (x_2 \vee \overline{x_2}) \vee x_1 x_2}}} \xrightarrow[t_{\&,\vee}^D]{\overline{\overline{x_1 ((x_2 \vee \overline{x_2}) \vee x_2)}}} \\ &\stackrel{\vdash}{=} \xrightarrow[t_{\vee,\&}^K]{\overline{\overline{x_1 ((x_2 \vee x_2) \vee \overline{x_2})}}} \xrightarrow[t_{\vee}^{\text{ОП}}]{\overline{\overline{x_1 (x_2 \vee \overline{x_2})}}} \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{\overline{\overline{x_1}}} x_1. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \tau^{\text{осн}} &= \{t_{\&}^M, t_{\neg}^M, t_{\&}^A, t_{\&}^K, t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\&,\vee}^D, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}\}, \\ \tau^A &= \{t_{\&}^A, t_{\vee}^A\}, \\ \tau^K &= \{t_{\&}^K, t_{\vee}^K\}, \\ \tau^{\text{ОП}} &= \{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}, \\ \tau^D &= \{t_{\&,\vee}^D, t_{\vee,\&}^D\}, \\ \tau^{\text{ПК}} &= \{t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}, t_{1,\vee}^{\text{ПК}}\}, \\ \tilde{\tau}^{\text{осн}} &= \{\tau^M, \tau^A, \tau^K, \tau^{\text{ОП}}, \tau^D, \tau^{\text{ПК}}, t^{\Pi}\}. \end{aligned}$$

Систему  $\tau^{\text{осн}}$  будем называть *системой основных тождеств*, а систему  $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$  — *расширенной системой основных тождеств*. Рассмотренные выше примеры выводимостей доказывают следующее утверждение.

**Лемма 1.1.** Система  $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$  выводима из системы  $\tau^{\text{осн}}$ .

Покажем теперь, что с помощью ЭП на основе системы тождеств  $\tau^{\text{осн}}$  из любой формулы можно получить совершенную ДНФ или формулу  $x_1\bar{x}_1$ . Введем для этого некоторые понятия, характеризующие формулы, появляющиеся на промежуточных этапах указанного ЭП. Произвольную конъюнкцию букв, содержащую, в общем случае, повторяющиеся или противоположные буквы, будем называть *обобщенной* ЭК (ОЭК), а дизъюнкцию таких конъюнкций, содержащую, в общем случае, повторяющиеся «слагаемые», — обобщенной ДНФ (ОДНФ). Обычную ЭК (ДНФ) и формулу  $x_1 \cdot \bar{x}_1$  будем считать *канонической* ОЭК (соответственно *канонической* ОДНФ), а совершенную ДНФ и формулу  $x_1 \cdot \bar{x}_1$  — *совершенными* ОДНФ. Напомним (см. ??), что формула, в которой все ФС  $\neg$  применяются только к БП и нет двух последовательно применяемых ФС  $\neg$ , называется формулой с поднятыми отрицаниями.

Пусть формула  $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$  реализует ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Докажем существование ЭП вида

$$\mathcal{F} \stackrel{\tau^{\text{M}}}{\equiv} \mathcal{F}' \stackrel{\{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{\&}^{\text{K}}\}}{\equiv} \mathcal{F}'' \stackrel{\tau^{\text{ПП}}}{\equiv} \widehat{\mathcal{F}} \stackrel{\{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, \tau^{\text{ПП}}\}}{\equiv} \widetilde{\mathcal{F}}, \quad (1.2)$$

где  $\tau^{\text{ПП}} = \{\tau^{\text{A}}, \tau^{\text{K}}, \tau^{\text{ПК}}, \tau^{\text{ОП}}, t^{\text{П}}\}$ ,  $\mathcal{F}'$  — формула с поднятыми отрицаниями,  $\mathcal{F}''$  — обобщенная ДНФ, а  $\widehat{\mathcal{F}}$  и  $\widetilde{\mathcal{F}}$  — каноническая и совершенная ОДНФ ФАЛ  $f$  соответственно. Действительно, *поднятие отрицаний*, то есть переход от  $\mathcal{F}$  к  $\mathcal{F}'$  в (1.2) (см. ??) можно осуществить применением тождеств  $t_{\neg}^{\text{M}}$ ,  $t_{\&}^{\text{M}}$  и  $t_{\vee}^{\text{M}}$  к подформулам вида  $\overline{(\mathcal{F}_1)}$ ,  $\overline{(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)}$  и  $\overline{(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)}$  соответственно до тех пор, пока все такие подформулы не будут «устранены». Переход от  $\mathcal{F}'$  к  $\mathcal{F}''$  в (1.2), который называется *раскрытием скобок*, осуществляется применением тождеств  $\{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{\&}^{\text{K}}\}$  к подформулам вида  $\mathcal{F}_1 \cdot (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3)$  или

$(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cdot \mathcal{F}_3$  до тех пор, пока они встречаются в преобразуемой формуле.

Переход от  $\mathcal{F}''$  к  $\widehat{\mathcal{F}}$  в (1.2), который называется *приведением подобных*, выполняется в три этапа. На первом этапе каждая ОЭК  $K''$  из ОДНФ  $\mathcal{F}''$  преобразуется в каноническую ОЭК  $K$  с помощью тождеств  $\{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&}^{\text{А}}, t_{\&}^{\text{К}}\}$ , а также тождества

$$x_i \cdot \bar{x}_i = x_1 \cdot \bar{x}_1, \quad (1.3)$$

которое выводится из них следующим образом:

$$x_i \cdot \bar{x}_i \xrightarrow{t_{0,\&}^{\text{ПК}}} (x_1 \cdot \bar{x}_1) \cdot (x_i \cdot \bar{x}_i) \xrightarrow{t_{\&}^{\text{К}}} (x_i \cdot \bar{x}_i) \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_1) \xrightarrow{t_{0,\&}^{\text{ПК}}} x_1 \cdot \bar{x}_1.$$

На втором этапе полученная формула  $\check{\mathcal{F}}$  преобразуется в  $\widehat{\mathcal{F}}$  путем «устранения» повторных вхождений равных элементарных конъюнкций или подформул  $x_1 \cdot \bar{x}_1$  с помощью тождеств  $\{\tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}$  и, в случае  $f \neq 0$ , последующего «устранения» ОЭК  $x_1 \cdot \bar{x}_1$  с помощью тождеств  $\{t_{\vee}^{\text{А}}, t_{\vee}^{\text{К}}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}\}$ .

Заметим, что первые два этапа приведения подобных, на которых происходит приведение повторений БП в ОЭК и ЭК, уже дают нам искомую формулу  $\widehat{\mathcal{F}}$ . Однако, для уменьшения числа шагов в последующих ЭП можно выполнить третий этап приведения подобных — этап приведения поглощений ЭК. На каждом шаге этого этапа в полученной ДНФ с помощью тождеств  $\{\tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}\}$  выделяется подформула вида  $K'' \vee K'' \cdot K$ , где  $K''$  и  $K$  — некоторые ЭК, а затем ЭК  $K'' \cdot K$  «устраняется» с помощью ЭП

$$K'' \vee K'' \cdot K \xrightarrow{t^{\text{П}}} K''.$$

Заметим также, что раскрытие скобок и различные этапы приведения подобных можно чередовать друг с другом при ЭП подформул формулы  $\mathcal{F}'$  или формул  $\mathcal{F}'', \widehat{\mathcal{F}}$ .

Переход от  $\widehat{\mathcal{F}}$  к  $\check{\mathcal{F}}$  в (1.2) выполняется в два этапа. Сначала каждая ЭК  $\widehat{K}$  из  $\widehat{\mathcal{F}}$ , которая имеет ранг  $r$ , где  $r = n - q <$

$\tilde{n}$ , и не содержит букв БП  $x_{i_1}, \dots, x_{i_q}$ , приводится к ее совершенной ДНФ  $\tilde{K}$  от БП  $X(n)$  в результате следующего ЭП:

$$\hat{K} \stackrel{t_{1,\&}^{\text{ПК}}}{\rightleftharpoons} \hat{K}(x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_1}) \cdots (x_{i_q} \vee \bar{x}_{i_q}) \stackrel{t_{\&,\vee}^{\text{D}}}{\rightleftharpoons} \tilde{K}.$$

Затем в полученной ОДНФ устраняются повторные вхождения слагаемых так, как это делалось ранее при переходе от  $\mathcal{F}$  к  $\hat{\mathcal{F}}$ , и в результате мы приходим к совершенной ОДНФ  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Лемма 1.2.** Любую формулу  $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ , реализующую ФАЛ  $f$ , с помощью ЭП на основе системы тождеств  $\tau^{\text{осн}}$  можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ  $f$  от БП  $X(n)$ .

Рассмотрим описанные выше ЭП на примере формулы

$$\mathcal{F} = (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{(x_1 \cdot x_3)} \cdot (x_2 \vee x_3),$$

для которой

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\stackrel{t_{\&}^{\text{M}}}{\mapsto} (x_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_3) &&= \mathcal{F}', \\ \mathcal{F}' &\stackrel{\{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, \tau^{\text{III}} \setminus t^{\text{II}}\}}{\rightleftharpoons} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 &&= \check{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}, \\ \hat{\mathcal{F}} &\stackrel{\{\tau^{\text{A}}, \tau^{\text{K}}, t^{\text{II}}\}}{\rightleftharpoons} \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 &&= \hat{\mathcal{F}}', \\ \hat{\mathcal{F}}' &\stackrel{\{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, \tau^{\text{III}}\}}{\rightleftharpoons} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 &&= \tilde{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

**Теорема 1.1.** Система  $\tau^{\text{осн}}$  — полная система тождеств.

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  — эквивалентные формулы, реализующие равные ФАЛ  $f'$  и  $f''$  соответственно, а набор  $x(n) = x$  содержит все различные БП, встречающиеся в  $\mathcal{F}'$

и  $\mathcal{F}''$ . Пусть, далее, ФАЛ  $f(x)$  равна  $f'$  и  $f''$ , а  $\tilde{\mathcal{F}}$  — совершенная ОДНФ ФАЛ  $f$  от БП  $X(n)$ . В силу леммы 1.2, имеет место ЭП

$$\mathcal{F}' \underset{\tau_{\text{осн}}}{\stackrel{\sim}{\rightleftharpoons}} \tilde{\mathcal{F}} \underset{\tau_{\text{осн}}}{\stackrel{\sim}{\rightleftharpoons}} \mathcal{F}'',$$

которое доказывает теорему.  $\square$

## §2 Эквивалентные преобразования схем из функциональных элементов и моделирование с их помощью эквивалентных преобразований формул. Моделирование эквивалентных преобразований формул и схем в различных базисах, теорема перехода

Распространим введенные в §1 понятия и обозначения на произвольный класс схем  $\mathcal{U}$ . В соответствии с определениями из §1 эквивалентность схем  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  из  $\mathcal{U}$  имеет место тогда и только тогда, когда  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  реализуют равные системы (матрицы) ФАЛ. При этом, обычно, предполагается, что соответствующие друг другу полюса (выходы, входы) в  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  имеют одинаковые пометки, а эквивалентность  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  записывается в виде тождества

$$t : \Sigma' \sim \Sigma''.$$

Для схем из  $\mathcal{U}$ , как и для формул, определяется ряд «простейших» преобразований, сохраняющих эквивалентность схем, которые называются *подстановками*. Тожество

$$\hat{t} : \hat{\Sigma}' \sim \hat{\Sigma}'',$$

которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества  $t : \Sigma' \sim \Sigma''$ , называется *подстановкой тождества  $t$* . Схема  $\Sigma'$  называется *подсхемой* схемы  $\Sigma$ , если

$$V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma), \quad E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$$

и любая вершина  $v$ ,  $v \in V(\Sigma')$ , которая либо относится к множеству входов (выходов)  $\Sigma$ , либо служит конечной (соответственно начальной) вершиной некоторого ребра из  $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$ , является входом (соответственно выходом)  $\Sigma'$ .

Будем считать, что для схем из  $\mathcal{U}$ , как и для формул, имеет место принцип эквивалентной замены, то есть заменяя подсхему  $\widehat{\Sigma}'$  схемы  $\Sigma$  эквивалентной ей схемой  $\widehat{\Sigma}''$  мы получаем схему  $\widetilde{\Sigma}$ , которая эквивалентна схеме  $\Sigma$ . При этом все введенные в §1 для случая эквивалентных преобразований формул понятия (однократная и кратная выводимость, полнота системы тождеств и др.), а также связанные с ними обозначения переносятся на случай ЭП схем из  $\mathcal{U}$  без изменений. Заметим, что вопрос о существовании конечной полной системы тождеств (КПСТ) является одним из основных вопросов, связанных с изучением ЭП схем из заданного класса  $\mathcal{U}$ .

Рассмотрим эти вопросы на примере ЭП СФЭ. Мы будем использовать все введенные выше общие понятия и определения, касающиеся ЭП схем, считая подстановкой СФЭ переименование (с возможным отождествлением) ее входных БП и переименование (с возможным дублированием и снятием<sup>1</sup>) ее выходных БП.

Напомним, что формулы представляют собой частный случай СФЭ, и для определенности будем считать, что любая формула  $\mathcal{F}$  из  $\mathcal{U}_B^\Phi$  является формулой-словом (см. §2), а соответствующую ей формулу-граф, т. е. квазидерево (см. ??), будем обозначать через  $\underline{\mathcal{F}}$ . При этом тождеству  $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ , где  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  — формулы из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , будет соответствовать тождество  $\underline{t} : \underline{\mathcal{F}}' \sim \underline{\mathcal{F}}''$ , где  $\underline{\mathcal{F}}'$  и  $\underline{\mathcal{F}}''$  — соответствующие  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  схемы из  $\mathcal{U}_B^C$ , являющееся «схемным» аналогом тождества  $t$ . Множество СФЭ вида  $\underline{\mathcal{F}}$ , где  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$ , будем обозначать

<sup>1</sup>Под дублированием (снятием) выхода  $z_i$  СФЭ понимается нанесение на вершину с пометкой  $z_i$  еще одной выходной БП (соответственно удаление с неё пометки  $z_i$ )

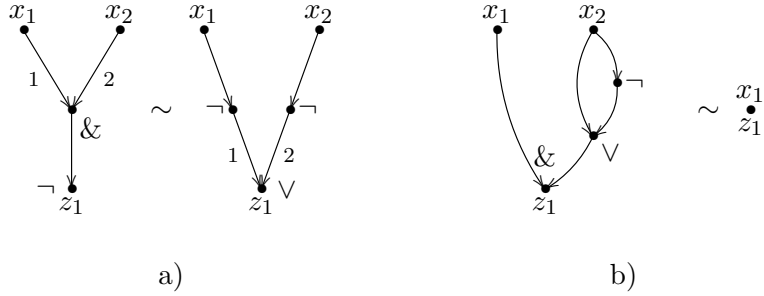


Рис. 2.1: тождества  $\underline{t_{\&}^M}$  и  $\underline{t_{1,\&}^{ПК}}$

через  $\mathfrak{F}$ , а систему тождеств вида  $\underline{t}$ , где  $t \in \tau$ , а  $\tau$  — система тождеств для  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , — через  $\underline{\tau}$ . Так, на рис. 2.1a и 2.1b приведены тождества  $\underline{t_{\&}^M}$  и  $\underline{t_{1,\&}^{ПК}}$ , являющиеся схемными аналогами введенных выше формульных тождеств  $t_{\&}^M$  и  $t_{1,\&}^{ПК}$ .

На рис. 2.2a и 2.2b показаны тождество ветвления  $t_{\mathcal{E}_i}^B$  и тождество снятия  $t_{\mathcal{E}_i}^C$  для функционального элемента  $\mathcal{E}_i$ ,  $i \in [1, b]$ , соответственно, а на рис. 2.2c — тождество снятия входа  $t_{\text{вх}}^C$ . Заметим, что применение тождества снятия равносильно выполнению операции удаления висячей вершины соответствующего типа (см. §3). Заметим также, что тождества  $t_{\mathcal{E}_i}^B$ ,  $t_{\mathcal{E}_i}^C$ ,  $t_{\text{вх}}^C$  не являются аналогами формульных тождеств и положим

$$\tau_B^B = \{t_{\mathcal{E}_i}^B\}_{i=1}^b, \quad \tau_B^C = \{t_{\mathcal{E}_i}^C\}_{i=1}^b \cup \{t_{\text{вх}}^C\}.$$

Очевидно, что с помощью этих тождеств можно избавиться от всех висячих вершин и всех внутренних ветвлений, имеющих в СФЭ. Следовательно, для любой СФЭ  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$ , существует ЭП вида  $\Sigma \stackrel{\text{ЭП}}{\mapsto} \mathfrak{F}$ , где  $\mathfrak{F}$  — формула (система формул) из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ .

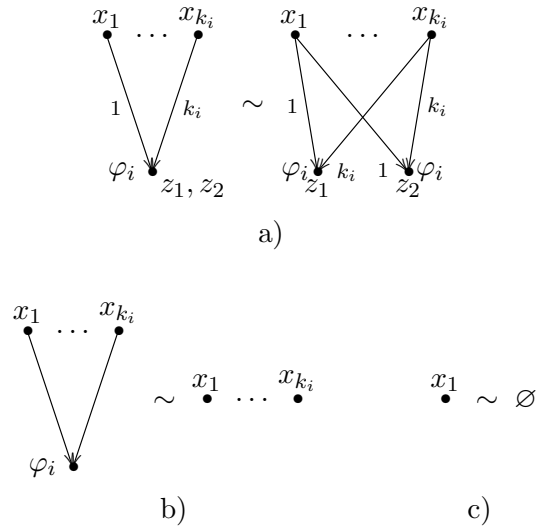


Рис. 2.2: тождества ветвления, снятия ФЭ и снятия входа

Пусть, далее,  $\mathcal{F} \mapsto_{\hat{t}} \widehat{\mathcal{F}}$  — однократное ЭП для формул из  $\mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\Phi}$ , где тождество  $t$  имеет вид

$$t: \mathcal{F}'(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{F}''(x_1, \dots, x_n),$$

а формула  $\widehat{\mathcal{F}}$  получается из формулы  $\mathcal{F}$  заменой подформулы  $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  формулой  $\mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ . Сопоставим этому ЭП «моделирующее» его однократное ЭП СФЭ вида  $\underline{\mathcal{F}} \mapsto_{\hat{t}} \widehat{\Sigma}$  (см. рис. 2.3). Заметим, что в том случае, когда формулы  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  являются неповторными формулами, а БП  $x_1, \dots, x_n$  — их существенными БП, СФЭ  $\widehat{\Sigma}$  совпадает с СФЭ  $\underline{\mathcal{F}}''$ . В остальных случаях из подформулы вида  $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  формулы  $\mathcal{F}$  необходимо с помощью тождеств  $\tau_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}$  сформировать сначала подсхему  $\underline{\mathcal{F}}'(\underline{\mathcal{F}}_1, \dots, \underline{\mathcal{F}}_n)$ , а затем применить тождество  $\hat{t}$ . При этом в СФЭ  $\widehat{\Sigma}$  могут появиться



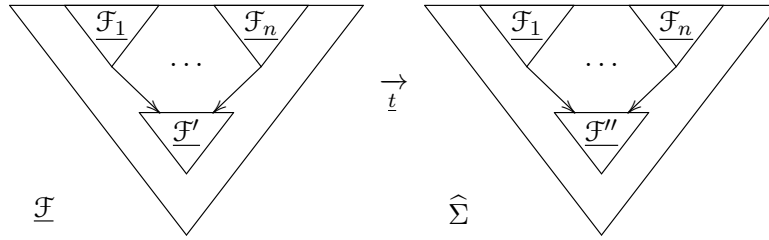


Рис. 2.3: моделирование ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

висячие вершины или внутренние «ветвления», и тогда для перехода от  $\widehat{\Sigma}$  к  $\widehat{\mathcal{F}}$  необходимо провести ЭП вида  $\widehat{\Sigma} \stackrel{\{\tau^C, \tau^B\}}{\rightleftharpoons} \widehat{\mathcal{F}}$ .

Следовательно, для любого ЭП вида  $\mathcal{F} \stackrel{\tau}{\rightleftharpoons} \widehat{\mathcal{F}}$ , где  $\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}_B^\Phi$ , существует моделирующее его ЭП вида

$$\mathcal{F} \stackrel{\{\underline{\tau}, \tau_B^B, \tau_B^C\}}{\rightleftharpoons} \widehat{\mathcal{F}}.$$

На рис. 2.4 показано ЭП СФЭ из  $\mathcal{U}^C$ , которое моделирует ЭП (1.1) для формул из  $\mathcal{U}^\Phi$ :

$$x_1 (x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \stackrel{t_{1, \&}^M}{\mapsto} x_1 (x_2 x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}) \stackrel{t_{1, \&}^{ПК}}{\mapsto} x_1.$$

Из описанного выше способа «моделирования» ЭП формул с помощью ЭП СФЭ, а также способа перехода от формул к СФЭ и обратно на основе ЭП с помощью тождеств  $\tau_B^B, \tau_B^C$  вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.1.** Если  $\tau$  — конечная полная система тождеств для ЭП формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , то  $\{\underline{\tau}, \tau^C, \tau^B\}$  — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из  $\mathcal{U}_B^C$ .

**Следствие.** Система тождеств  $\{\underline{\tau}^{\text{осн}}, \tau^B, \tau^C\}$  — КПСТ для ЭП СФЭ из  $\mathcal{U}^C$ .

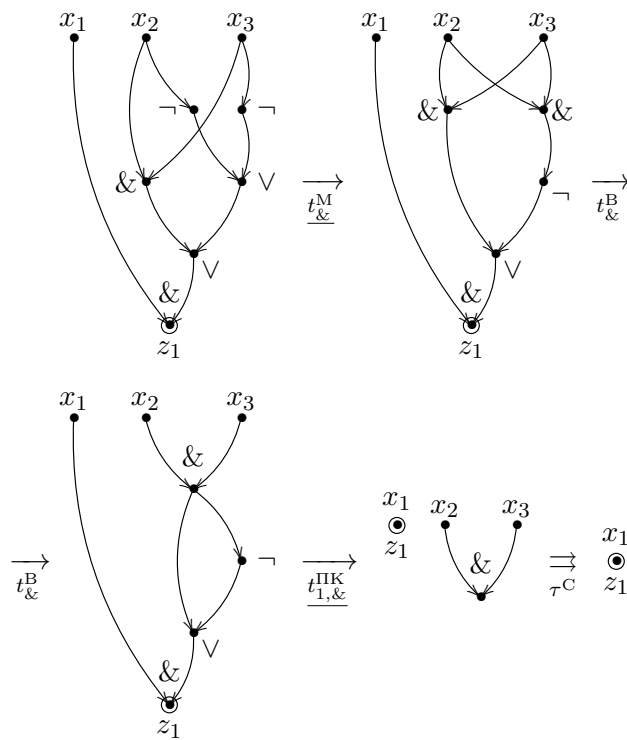


Рис. 2.4: пример моделирования ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

Рассмотрим далее вопросы структурного моделирования формул в различных базисах. Пусть помимо базиса  $B = \{\varphi_i\}_{i=1}^b$  у нас имеется другой конечный полный базис  $B' = \{\varphi'_i\}_{i=1}^{b'}$ , и пусть формула  $\Phi'_i(x_1, \dots, x_{k'_i})$  из  $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$ , где  $k'_i \geq k_i$ , реализует ФАЛ  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, b$ . Заметим, что в случае  $k'_i > k_i$  БП  $x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i}$  являются фиктивными БП формулы  $\Phi'_i$ . Положим

$$\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b), \quad \Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b),$$

где  $\Pi'_i$  — тождество вида  $\varphi_i = \Phi'_i$ ,  $i = 1, \dots, b$ , и формулы из  $\Phi'$  (тождества из  $\Pi'$ ) будем называть *формулами* (соответственно *тождествами*) *перехода от базиса B к базису B'*.

Для формулы  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_B^\Phi$ , обозначим через  $\Pi'(\mathcal{F})$  формулу над базисом  $B'$ , которая получается из  $\mathcal{F}$  заменой каждой ее подформулы вида  $\varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i})$  формулой  $\Phi'_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}, x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i})$ , то есть является результатом подстановки формулы  $\mathcal{F}_j$  вместо БП  $x_j$  в формулу  $\Phi'_i$  для всех  $j$ ,  $j = 1, \dots, k_i$ . Переход от формулы  $\mathcal{F}$  к формуле  $\Pi'(\mathcal{F})$  будем называть *структурным моделированием формулы  $\mathcal{F}$  в базисе  $B'$  на основе формул перехода  $\Phi'$*  или, иначе, *на основе тождеств перехода  $\Pi'$* . Заметим, что этот переход является специальным ЭП вида

$$\mathcal{F} \stackrel{\Pi'}{\mapsto} \Pi'(\mathcal{F})$$

для формул над базисом  $B \cup B'$ . Отсюда следует, в частности, что в результате указанного структурного моделирования обеих частей тождества  $t$ , являющихся формулами из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , получается тождество  $t'$  для формул из  $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$ , которое мы будем обозначать через  $\Pi'(t)$ . Множество формул вида  $\Pi'(\mathcal{F})$ , где  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$ , будем обозначать через  $\Pi'(\mathfrak{F})$ , а множество тождеств вида  $\Pi'(t)$ , где  $t \in \tau$  — тождество над  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , — через  $\Pi'(\tau)$ .

Рассмотрим теперь вопросы моделирования ЭП формул в базисе  $B$  с помощью ЭП формул базиса  $B'$ . Пусть  $\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b)$  — система формул перехода от базиса  $B$  к базису  $B'$ , а  $\Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b)$  — система тождеств перехода, связанная с  $\Phi'$ . Заметим, что любое ЭП для формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , имеющее вид

$$\mathcal{F} \underset{\tau}{\rightleftarrows} \widehat{\mathcal{F}}, \quad (2.1)$$

может быть «промоделировано» с помощью ЭП для формул из  $\mathcal{U}_{B'}^{\Phi'}$  вида

$$\mathcal{F}' \underset{\tau'}{\rightleftarrows} \widehat{\mathcal{F}}', \quad (2.2)$$

где  $\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F})$ ,  $\widehat{\mathcal{F}}' = \Pi'(\widehat{\mathcal{F}})$  и  $\tau' = \Pi'(\tau)$ . Действительно, пусть ЭП (2.1) является однократным ЭП на основе тождества  $t$ ,  $t \in \tau$ , которое имеет вид

$$t: \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_q) = \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_q),$$

и пусть формула  $\widehat{\mathcal{F}}$  получается в результате замены подформулы  $\mathfrak{A}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$  формулы  $\mathcal{F}$  формулой  $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$ . Тогда тождество  $t' = \Pi'(t)$  имеет вид

$$t': \mathfrak{A}'(x_1, \dots, x_q) = \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_q),$$

где  $\mathfrak{A}' = \Pi'(\mathfrak{A})$  и  $\mathfrak{B}' = \Pi'(\mathfrak{B})$ , а формула  $\widehat{\mathcal{F}}'$  может быть получена из формулы  $\mathcal{F}'$  в результате замены ее подформулы  $\mathfrak{A}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$ , где  $\mathcal{F}'_j = \Pi'(\mathcal{F}_j)$  для всех  $j$ ,  $j \in [1, q]$ , формулой  $\mathfrak{B}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$ . Моделирование кратного ЭП вида (2.1) с помощью кратного ЭП вида (2.2) осуществляется путем последовательного моделирования однократных ЭП, составляющих ЭП (2.1).

Описанное выше моделирование позволяет выполнять ЭП для тех эквивалентных формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , которые принадлежат множеству  $\Pi'(\mathcal{U}_B^\Phi)$ , то есть являются «моделями»

формулы из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , на основе системы тождеств  $\Pi'(\tau)$ , являющихся «моделями» тождеств из  $\tau$ . Для того чтобы проводить ЭП для произвольных формул из  $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$  с использованием системы тождеств  $\Pi'(\tau)$ , выберем какую-либо систему формул перехода  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{b'})$  от базиса  $B'$  к базису  $B$  и рассмотрим связанную с ней систему тождеств перехода  $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_{b'})$ . Пусть  $\check{\Pi}$  — система тождеств вида  $\check{\Pi} = \Pi'(\Pi)$  для ЭП формул из  $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$ , которая получается в результате структурного моделирования правых частей тождеств из  $\Pi$  на основе системы тождеств  $\Pi'$ . Для произвольной формулы  $\mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}_{B'}^\Phi$ , положим

$$\check{\Pi}(\mathcal{F}') = \Pi'(\Pi(\mathcal{F}'))$$

и заметим, что

$$\mathcal{F}' \stackrel{\check{\Pi}}{\mapsto} \check{\mathcal{F}}' = \check{\Pi}(\mathcal{F}'), \quad \check{\mathcal{F}}' \in \Pi'(\mathcal{U}_B^\Phi).$$

В силу сказанного выше, отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.2** (теорема перехода). *Пусть  $\tau$  — КПСТ для ЭП формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , а  $\Pi'$  и  $\Pi$  — системы тождеств для перехода от базиса  $B$  к базису  $B'$  и от базиса  $B'$  к базису  $B$  соответственно. Тогда система тождеств  $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$  является КПСТ для ЭП формул из  $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$ .*

**Следствие.** *Из системы тождеств  $\tau^{\text{осн}}$  для ЭП формул из  $\mathcal{U}_B^\Phi$  (см. §3) указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе  $B$ .*

Аналогичным образом на основе теоремы 2.1 решаются вопросы построения КПСТ для ЭП СФЭ в произвольном базисе.

### §3 Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств

Рассмотрим вопросы ЭП для КС из  $\mathcal{U}^K$  с неразделенными (бесповторными) полюсами. В соответствии с ?? эквивалентность КС  $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$  и  $\Sigma'' = \Sigma''(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ , то есть справедливость тождества  $t : \Sigma' \sim \Sigma''$  означает, что для любых  $i$  и  $j$  из отрезка  $[1, m]$  ФАЛ проводимости от  $a_i$  к  $a_j$  в КС  $\Sigma'$  равна ФАЛ проводимости от  $a_i$  к  $a_j$  в КС  $\Sigma''$ . На рис. 3.1a–3.1e и 3.1f приведены пары эквивалентных КС, образующие тождества  $t_1$ – $t_5$  и  $t_6^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , соответственно, которые мы будем называть *основными тождествами* для ЭП КС.

Определим подстановку для КС как переименование (с возможным отождествлением и инвертированием) БП, а также переименование (с возможным отождествлением и снятием) полюсов. Заметим, что применяя одну и ту же подстановку к двум эквивалентным КС, мы получим эквивалентные КС. Действительно, для переименования БП и переименования без отождествления полюсов это очевидно, а в случае отождествления полюсов эквивалентность получаемых КС вытекает из того, что матрица достижимости КС, являющейся результатом отождествления, однозначно определяется матрицей достижимости исходной КС. На рис. 3.2a (3.2b) показана подстановка  $\hat{t}_4$  тождества  $t_4$  (соответственно  $\hat{t}_5$  тождества  $t_5$ ), связанная с переименованием БП  $x_2$  в  $x_1$  (соответственно полюсов  $1 = 3$  в  $1$ ).

Понятие подсхемы для КС из рассматриваемого класса определяется аналогично §5 с учетом неразделенности полюсов. Это означает, что для подсхемы  $\Sigma'$  КС  $\Sigma$  имеет место включение  $V(\Sigma') \subset V(\Sigma)$  и  $E(\Sigma') \in E(\Sigma)$ , а полюсами  $\Sigma'$  являются все принадлежащие ей полюса КС  $\Sigma$  и все те ее вершины, которые инцидентны в  $\Sigma$  ребрам из  $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$ ,

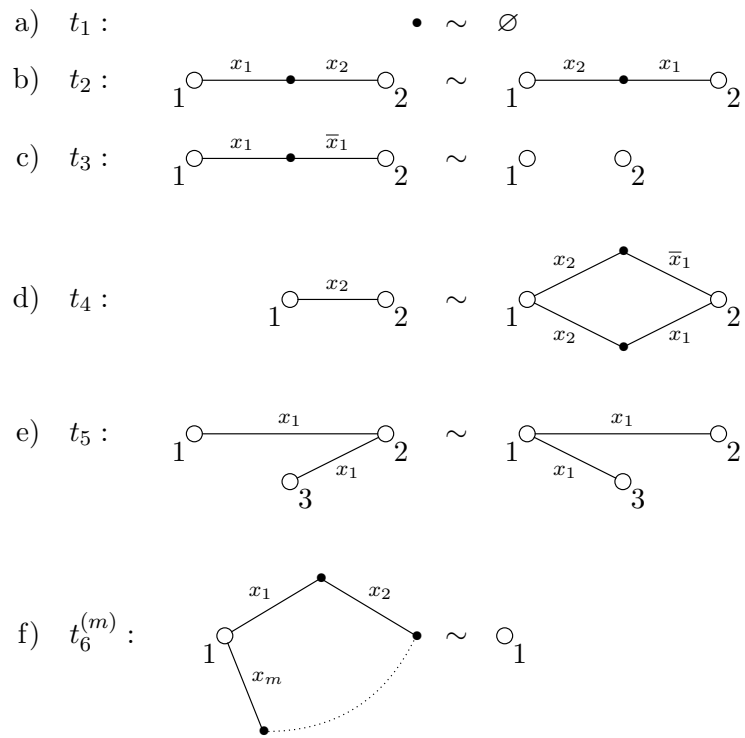


Рис. 3.1: основные тождества для КС

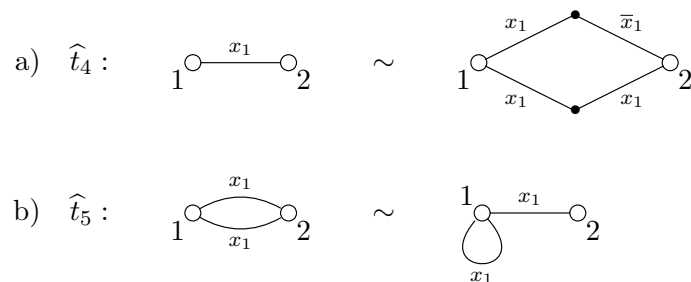


Рис. 3.2: подстановки для основных тождеств

и, возможно, некоторые другие вершины. При таком определении подсхемы для рассматриваемого класса КС будет выполняться принцип эквивалентной замены.

Рассмотрим примеры ЭП контактных схем с помощью системы основных тождеств. На рис. 3.3а–3.3е приведены тождества  $t_7$ – $t_{11}$ , которые мы будем называть *вспомогательными*. Тождество  $t_{10}$  называют иногда тождеством замыкания по транзитивности, а тождество  $t_{11}$  — «леммой» о звезде.

**Лемма 3.1.** *Имеет место выводимость  $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\} \Leftrightarrow \{t_7 - t_{11}\}$ .*

*Доказательство.* Заметим, что выводимость  $\{t_5, t_6^{(1)}\} \Rightarrow t_7$  доказывается применением тождества  $t_6^{(1)}$  к правой части тождества  $\hat{t}_5$  (см. рис. 3.2а) для удаления из нее «висячего» цикла длины 1. Выводимость тождеств  $t_8$ – $t_{11}$  из основных тождеств  $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\}$  показана на рис. 3.4–3.7 соответственно, где  $\Sigma_i$  и  $\bar{\Sigma}_i$  — левая и правая части тождества  $t_i$ ,  $i \in [8, 11]$ .  $\square$

Обобщим тождества  $t_1$ – $t_{11}$  на случай КС от БП  $X(n)$ , где  $n \geq 2$ . Для каждого  $i$ ,  $i \in [1, 2^n]$ , сопоставим ЭК ви-



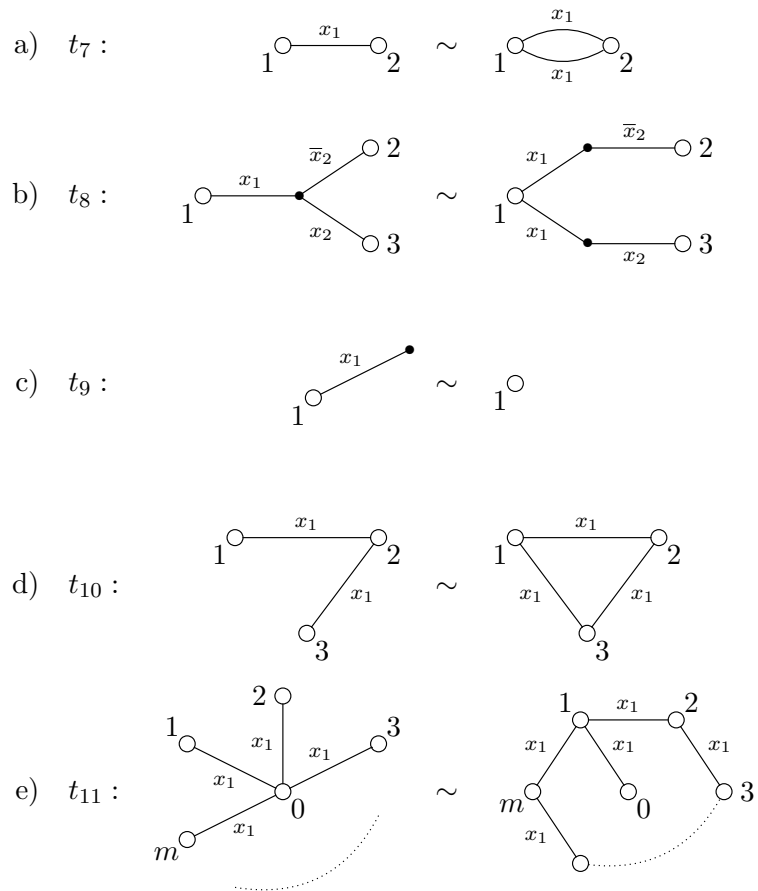


Рис. 3.3: вспомогательные тождества для КС

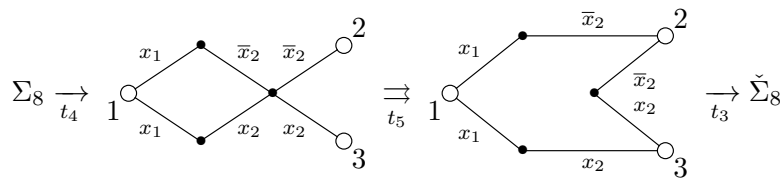


Рис. 3.4: вывод  $t_8$

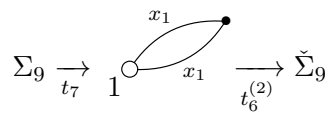


Рис. 3.5: вывод  $t_9$

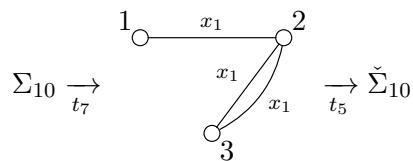


Рис. 3.6: вывод  $t_{10}$

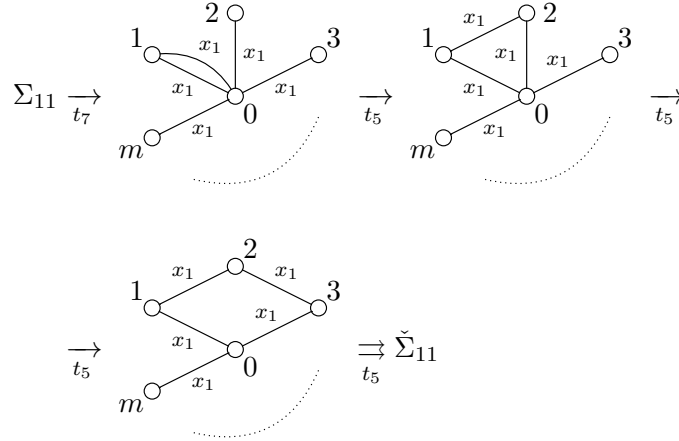


Рис. 3.7: вывод  $t_{11}$

да  $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$ , где  $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = i - 1$ , моделирующую ее цепочку  $I_i^{(n)}$  (см. ??), и пусть

$$\begin{aligned} I_i^{(n)} &= I_i, & i \in [1, 2^n], & & I &= I_{2^n}; \\ I_i^{(n-1)} &= I'_i, & i \in [1, 2^{n-1}], & & I' &= I'_{2^{n-1}}; \\ I_i^{(n-2)} &= I''_i, & i \in [1, 2^{n-2}], & & I'' &= I''_{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Систему тождеств  $\tau^{(n)} = \{t_1^{(n)}, \dots, t_{11}^{(n)}\}$ , где  $t_1^{(n)} = t_1$ ,  $t_6^{(n)}$  — соответствующее основное тождество (см. рис. 3.1f),  $t_2^{(n)}$  — система, состоящая из тождеств, показанных на рис. 3.8a, где  $\tilde{I}$  — произвольная перестановка цепочки  $I$ , а остальные тождества приведены на рис. 3.8b—3.8i, будем называть системой *обобщенных тождеств порядка  $n$* . При этом система  $\tau_n = \{t_1, \dots, t_5, t_6^{(1)}, \dots, t_6^{(n)}\}$  считается системой основных тождеств порядка  $n$ , а система всех основных тождеств обозначается через  $\tau_\infty$ .

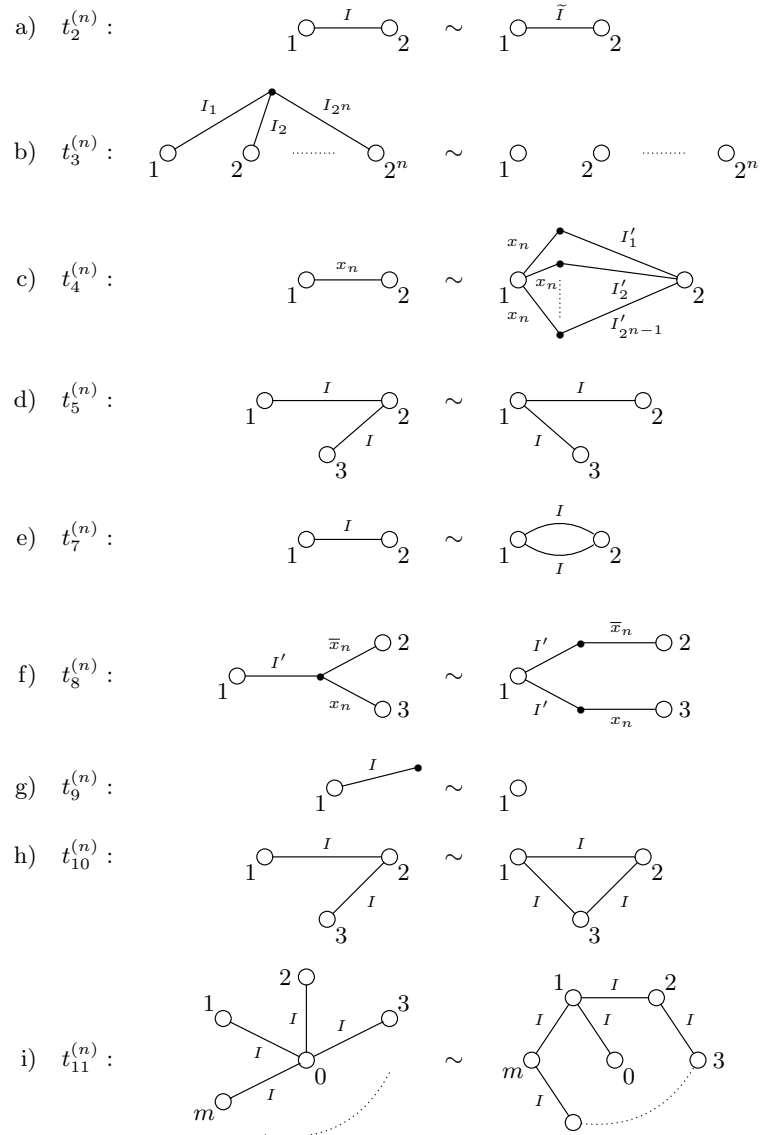


Рис. 3.8: обобщенные тождества порядка  $n$  для КС

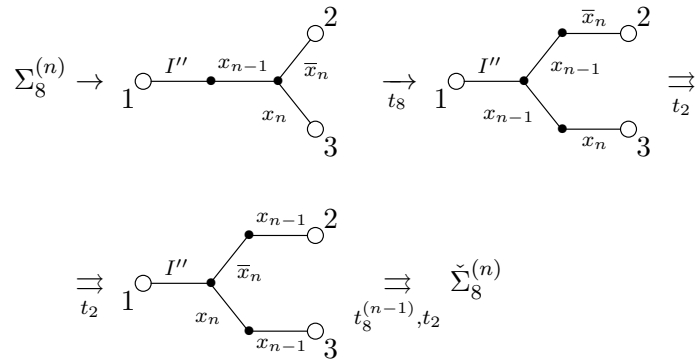


Рис. 3.9: вывод  $t_8^{(n)}$

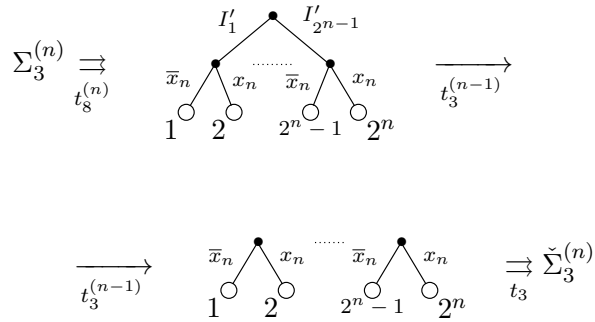


Рис. 3.10: вывод  $t_3^{(n)}$

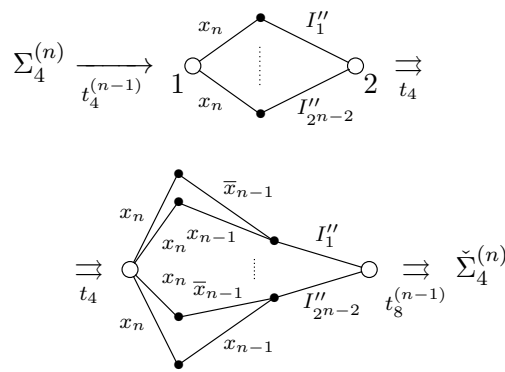


Рис. 3.11: вывод  $t_4^{(n)}$

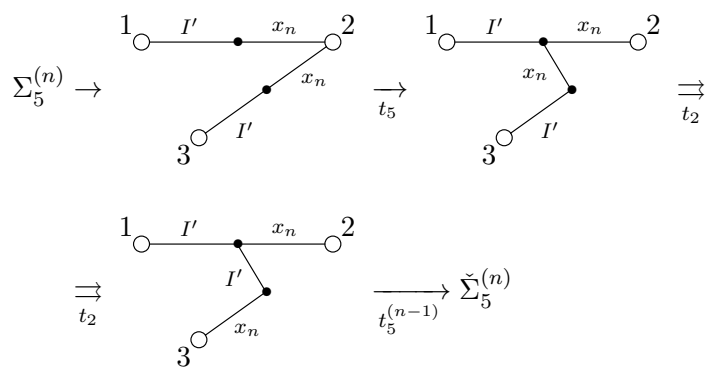


Рис. 3.12: вывод  $t_5^{(n)}$

**Лемма 3.2.** При  $n \geq 2$  имеет место выводимость  $\tau_n \Rightarrow \tau^{(n)}$ .

*Доказательство.* Отметим сначала следующие очевидные выводимости:

$$\{t_2\} \Rightarrow t_2^{(n)}, \quad \{t_9\} \Rightarrow t_9^{(n)}.$$

Выводимость  $\tau_n \Rightarrow t_i^{(n)}$ ,  $i = 8, 3, 4, 5$ , докажем индукцией по  $n$ ,  $n \geq n_i$ , где  $n_3 = n_5 = 1$  и  $n_8 = n_4 = 2$ . Базис этой индукции составляет тождество  $t_i = t_i^{(n_i)}$ ,  $i = 8, 3, 4, 5$ , а обоснование индуктивного перехода дает выводимость правой части  $\check{\Sigma}_i^{(n)}$  тождества  $t_i^{(n)}$ ,  $n > n_i$ , из его левой части  $\Sigma_i^{(n)}$ , показанная на рис. 3.9–3.12.

Легко видеть, что выводимости

$$\{t_2^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow t_7^{(n)}, \quad \{t_7^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow \{t_{10}^{(n)}, t_{11}^{(n)}\}$$

при  $n \geq 2$  доказываются аналогично тому, как это делалось для случая  $n = 1$  (см. рис. 3.6, 3.7).

Лемма доказана.  $\square$

#### §4 Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Докажем сначала полноту системы основных тождеств  $\tau_\infty$  для ЭП КС. Для этого, как обычно, достаточно доказать, что с помощью ЭП на основе системы  $\tau_\infty$  произвольную КС из  $\mathcal{U}^K$  можно привести к каноническому виду. Напомним (см. ??), что каноническая КС  $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ , или, иначе, *каноническая КС порядка  $n$* , представляет собой объединение канонических  $(1, 1)$ -КС вида  $\widehat{\Sigma}_{ij}(x_1, \dots, x_n; a_i, a_j)$ , построенных на основе совершенных ДНФ ФАЛ проводимости от  $a_i$  к  $a_j$  для всех  $i$  и  $j$  таких, что  $1 \leq i < j \leq m$ .

Любую цепь  $I_i^{(n)}$  (см. §3), где  $i \in [1, 2^n]$ , а также любую цепь, которая получается из  $I_i^{(n)}$  перестановкой контактов, будем называть *канонической цепью порядка  $n$* . Заметим, что КС  $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$  является канонической КС порядка  $n$  тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

1. любой контакт  $\widehat{\Sigma}$  принадлежит некоторой канонической цепи порядка  $n$ , являющейся подсхемой схемы  $\widehat{\Sigma}$ , причем полюсами этой подсхемы служат только концевые вершины данной цепи;
2. любая внутренняя вершина  $\widehat{\Sigma}$  является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта 1;
3. в КС  $\widehat{\Sigma}$  отсутствуют «висячие циклы» (см. тождество  $t_6^{(n)}$ ) и «параллельные» цепи, то есть канонические цепи порядка  $n$  из пункта 1, которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК;
4. в КС  $\widehat{\Sigma}$  нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида  $I_i^{(n)}$ , соединяющих полюс  $a_j$  с полюсом  $a_k$  и полюс  $a_k$  с полюсом  $a_t$  (см. рис. 4.1a), влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей полюс  $a_j$  с полюсом  $a_t$  (см. рис. 4.1b).

**Лемма 4.1.** *Для любой КС  $\Sigma$ , где  $\Sigma \in \mathcal{U}^K$  и  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ , и любой эквивалентной  $\Sigma$  КС  $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$  канонического вида существует ЭП  $\Sigma \xrightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}$ .*

*Доказательство.* Построим ЭП вида

$$\Sigma \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_1 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_2 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_3 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_4 = \widehat{\Sigma},$$



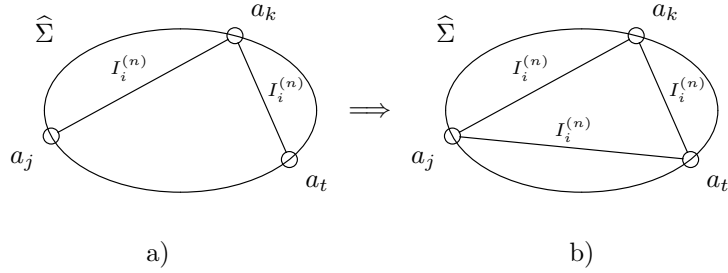


Рис. 4.1: к свойству 4 КС канонического вида

где КС  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , обладает отмеченными выше свойствами  $1, \dots, i$ , отличающими канонические КС. Первое из этих ЭП имеет вид

$$\Sigma \xRightarrow{t_4^{(n)}} \Sigma_1$$

и связано с применением к каждому контакту тождества  $t_4^{(n)}$ .

Существование ЭП

$$\Sigma_1 \xRightarrow{\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}} \Sigma_2 \quad (4.1)$$

докажем индукцией по числу тех внутренних вершин КС  $\Sigma_1$ , которые не являются внутренними вершинами ее канонических цепей. Базис индукции составляют схемы  $\Sigma_1$ , которые не имеют указанных вершин и для которых, следовательно,  $\Sigma_2 = \Sigma_1$ . Пусть теперь КС  $\Sigma_1$  имеет хотя бы одну вершину указанного вида и пусть  $v$  — одна из таких вершин. Удалим с помощью тождества  $t_6^{(n)}$  все присоединенные к  $v$  «висячие» циклы и рассмотрим все остальные цепи  $C_1, \dots, C_q$ , конечной вершиной которых она является (см. рис. 4.2а). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для некоторых натуральных чисел

$$a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_p < a_{p+1} = q + 1$$

и любого  $j$ ,  $j \in [1, p]$ , цепи  $C_{a_j}, \dots, C_{a_{j+1}-1}$  являются цепями типа  $I_{i_j}^{(n)} = I_{i_j}$ , где  $i_1, \dots, i_p$  — различные числа отрезка  $[1, 2^n]$ . Применяя к каждой из этих  $p$  групп цепей одного типа тождество  $t_{11}^{(n)}$ , получим КС  $\Sigma'_1$ , в которой из вершины  $v$  выходит по одной цепи каждого типа  $I_{i_j}$ ,  $j \in [1, p]$  (см. рис. 4.2b). Пусть, далее, КС  $\Sigma''_1$  получается из КС  $\Sigma'_1$  присоединением к вершине  $v$  с помощью тождества  $t_9^{(n)}$  «висячих» цепей  $C_{p+1}, \dots, C_{2^n}$  всех отсутствующих среди  $I_{i_1}, \dots, I_{i_p}$  типов (см. рис. 4.2c), а КС  $\Sigma'''_1$  получается из КС  $\Sigma''_1$  в результате удаления с помощью тождества  $t_3^{(n)}$  вершины  $v$  вместе со всеми «инцидентными» ей цепями и устранения с помощью тождества  $t_1$  образовавшихся при этом изолированных вершин — концевых вершин цепей  $C_{p+1}, \dots, C_{2^n}$  (см. рис. 4.2d). По индуктивному предположению для КС  $\Sigma'''_1$  существует ЭП вида

$$\Sigma'''_1 \xrightarrow{\quad} \Sigma_2$$

$$\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}$$

и, следовательно, для КС  $\Sigma_1$  существует ЭП (4.1).

Переход от КС  $\Sigma_2$  к КС  $\Sigma_3$  осуществляется с помощью тождеств  $t_6^{(n)}$  и  $t_7^{(n)}$ , а от КС  $\Sigma_2$  к КС  $\Sigma_3$  — с помощью тождеств  $t_{10}^{(n)}$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 4.1.** *Для любых двух эквивалентных КС  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  существует ЭП вида  $\Sigma' \xrightarrow{\tau_n} \Sigma''$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\widehat{\Sigma}'$  и  $\widehat{\Sigma}''$  — канонические КС от БП  $x_1, \dots, x_n$ , эквивалентные КС  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  соответственно. Из определений следует, что  $\widehat{\Sigma}' \xrightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}''$ , и поэтому, в силу леммы 4.1, существует ЭП вида

$$\Sigma' \xrightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}' \xrightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}'' \xrightarrow{\tau_n} \Sigma''.$$

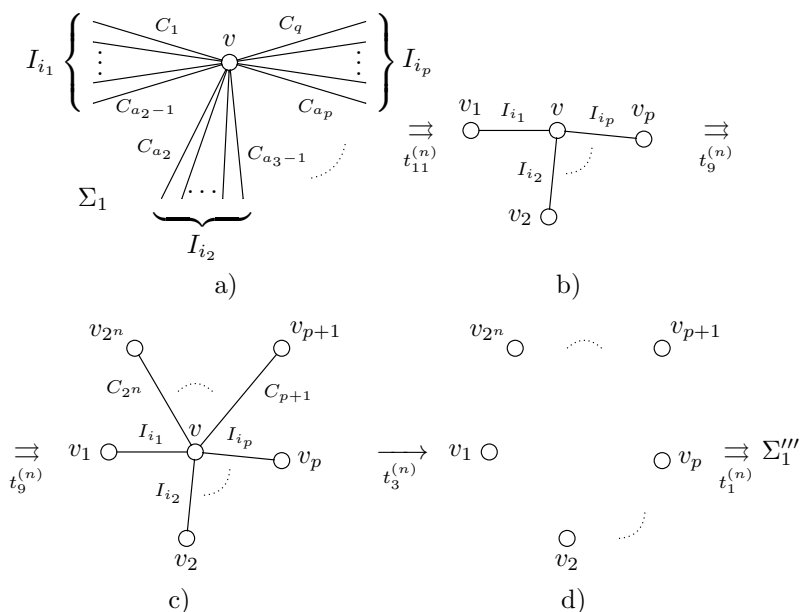


Рис. 4.2: к доказательству леммы 4.1

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Система  $\tau_n$  является КПСТ для ЭП КС из  $\mathcal{U}^K$  от БП  $x_1, \dots, x_n$ .

**Следствие 2.** Система  $\tau_\infty$  является ПСТ для ЭП КС из  $\mathcal{U}^K$ .

Докажем теперь отсутствие КПСТ в классе  $\mathcal{U}^K$ . Для КС  $\Sigma$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  и набора  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , определим величину

$$\Theta(\Sigma, \alpha) = |E(\Sigma|_\alpha)| - |V(\Sigma|_\alpha)| + |c(\Sigma|_\alpha)|,$$

которая (см. ??) задает цикломатическое число графа  $\Sigma|_\alpha$ .

Положим, далее,

$$\Theta(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} \Theta(\Sigma, \alpha).$$

**Лемма 4.2.** Если  $\Sigma'(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[\{t_1-t_5\}]{\Rightarrow} \Sigma''(x_1, \dots, x_n)$ , то  $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$ , а если  $\Sigma' \xrightarrow[\tau_k]{\Rightarrow} \Sigma''$ , где  $k < n$ , то  $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$  делится на  $2^{n-k}$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$ , если  $\Sigma' \xrightarrow[t_i]{\Rightarrow} \Sigma''$  для любого  $i$  из отрезка  $[1, 5]$ . Действительно, пусть КС  $\Sigma''$  получается из КС  $\Sigma'$  заменой ее подсхемы  $\widehat{\Sigma}'_i$ , которая имеет вид левой части тождества  $t_i$ , на соответствующую ей правую часть  $\widehat{\Sigma}''_i$  этого тождества. Нетрудно проверить, что для любого  $i$ ,  $i \in [1, 5]$ , число линейно независимых циклов графов  $\Sigma|_{\alpha'}$  и  $\Sigma|_{\alpha''}$  одинаково при всех  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , и, следовательно,  $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$ .

Пусть теперь  $\Sigma' \xrightarrow[\tau_k]{\Rightarrow} \Sigma''$ , причем  $k < n$ . Если КС  $\Sigma'$  содержит в качестве подсхемы цикл из  $k$  контактов с одним полюсом, то КС  $\Sigma''$  содержит вместо него один лишь полюс. Рассмотрим цикломатическое число сети  $\Sigma'|_{\alpha}$  для различных  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ . Если цикл указанного вида в КС  $\Sigma'$  содержит контакты, помеченные различными буквами одной и той же БП, то, очевидно, для любого  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ ,  $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 0$ . В противном случае, пусть  $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$  — все различные БП, встречающиеся среди пометок указанного цикла, причем  $m \leq k$ . Заметим, что если цикл проводит на наборе  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , то он проводит и на всех  $2^{n-m}$  наборах, в которых значения переменных с индексами  $j_1, \dots, j_m$  совпадают со значениями соответствующих переменных набора  $\alpha$ . Таким образом, разность

$$\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (\Theta(\Sigma'|_{\alpha}) - \Theta(\Sigma''|_{\alpha}))$$

делится на  $2^{n-m}$  и, следовательно, делится на  $2^{n-k}$

Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 4.2.** *В классе  $\mathcal{U}^K$  не существует конечной полной системы тождеств.*

*Доказательство.* Проведем доказательство от противного: пусть  $\tau$  — КПСТ для ЭП КС  $\mathcal{U}^K$ , и пусть  $n$  — максимальное число БП, встречающихся в тождествах системы  $\tau$ . Тогда  $\tau_n \Rightarrow \tau$  и  $\tau_n$  — КПСТ для  $\mathcal{U}^K$ . Докажем, что  $\tau_n \not\Rightarrow t_6^{(n+1)}$ . Для этого рассмотрим КС  $\Sigma'$ , состоящую из простого цикла длины  $(n+1)$ , содержащего контакты с пометками  $x_i$ ,  $i \in [1, n+1]$ , и имеющую единственный полюс с пометкой 1, которая является левой частью тождества  $t_6^{(n+1)}$ . Очевидно, что ей эквивалентна КС  $\Sigma''$ , содержащая изолированный полюс 1, которая является правой частью тождества  $t_6^{(n+1)}$ . Если  $\tau_n \Rightarrow t_6^{(n+1)}$ , то  $\Sigma' \stackrel{\tau_n}{\Rightarrow} \Sigma''$ . Согласно данным выше определениям,  $\Theta(\Sigma') = 1$ ,  $\Theta(\Sigma'') = 0$  и разность  $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 1$  не делится на 2, что противоречит утверждению леммы 4.2. Таким образом, тождество  $t_6^{(n+1)}$  не выводится из системы  $\tau_n$ , а значит, и из системы  $\tau$ . Отсюда следует, что  $\tau$  не может являться КПСТ для ЭП КС из класса  $\mathcal{U}^K$ .

Теорема доказана.  $\square$

## Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном  $n$ -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.
- [10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
- [17] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.

- // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.
- [18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.
- [19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
- [20] *Низматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [25] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.
- [26] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.



- 
- [28] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [29] Яблонский С. В. Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [30] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
- [31] Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.
- [32] Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [33] Shannon C. E. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [34] Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.