

Лекция 2. Точки сочленения и мосты.  
Связность,  $k$ -связность. Двусвязные графы.  
Компоненты двусвязности (блоки) графа.  
Дерево блоков и точек сочленения графа.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

# Точки сочленения и мосты

Вершина  $v$  графа  $G = (V, E)$  называется **точкой сочленения**, или **разделяющей вершиной**, если граф  $G - v$  содержит больше компонент связности, чем граф  $G$ .

Связный непустой граф без точек сочленения называется **неразделимым** графом, или **блоком**.

Ребро  $e$  графа  $G = (V, E)$  называется **мостом**, если граф  $G - e$  содержит больше компонент связности, чем граф  $G$ .

Ясно, что концевая вершина моста в графе (если ее степень не меньше двух) является точкой сочленения этого графа.

# Точки сочленения и мосты

# Свойства точек сочленения

**Теорема 1.** Пусть  $G = (V, E)$  — связный граф и  $v \in V$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1)  $v$  — точка сочленения;
- 2) найдутся такие вершины  $u, w \in V$ ,  $u \neq v$ ,  $w \neq v$ , что вершина  $v$  принадлежит любой простой  $(u, w)$ -цепи;
- 3) существует разбиение множества  $V \setminus \{v\}$  на такие части  $U, W$ , что для любых вершин  $u \in U$ ,  $w \in W$  вершина  $v$  принадлежит любой простой  $(u, w)$ -цепи.

## Свойства точек сочленения

### Доказательство.

$1 \Rightarrow 3$ . Т. к.  $v$  — точка сочленения, граф  $G - v$  — не связен, т. е. содержит по меньшей мере две компоненты связности.

Положим  $U$  — все вершины одной из этих компонент связности,  $W = V \setminus (U \cup \{v\})$ . Тогда любые вершины  $u \in U$ ,  $w \in W$  лежат в разных компонентах связности графа  $G - v$ . Значит, любая простая  $(u, w)$ -цепь проходит через вершину  $v$ .

$3 \Rightarrow 2$ , т. к. свойство 2 является частным случаем свойства 3.

$2 \Rightarrow 1$ . Если вершина  $v$  принадлежит любой простой цепи из вершины  $u$  в вершину  $w$ , то граф  $G - v$  — не связен. Значит,  $v$  — точка сочленения.



# Свойства точек сочленения

# Свойства мостов

**Теорема 2.** Пусть  $G = (V, E)$  — связный граф и  $e \in E$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1)  $e$  — мост;
- 2)  $e$  не принадлежит ни одному простому циклу графа  $G$ ;
- 3) найдутся такие вершины  $u, w \in V$ , что ребро  $e$  принадлежит любой простой  $(u, w)$ -цепи;
- 4) существует разбиение множества  $V$  на такие части  $U, W$ , что для любых вершин  $u \in U, w \in W$  ребро  $e$  принадлежит любой простой  $(u, w)$ -цепи.

# $k$ -связность

Граф  $G = (V, E)$  называется  **$k$ -связным**, если при удалении из него не более  $(k - 1)$  любых вершин остается связный граф.

**Двусвязный** граф называется также **неразделимым** графом, или **блоком**.

Граф  $G = (V, E)$  называется **реберно  $k$ -связным**, если при удалении из него не более  $(k - 1)$  любых ребер остается связный граф.



## Задача о надежной связной сети

*Сеть с  $p$  узлами и соединениями между ними — связна, если из каждого узла можно достигнуть любой другой узел (возможно, проходя через промежуточные узлы). Требуется построить такую сеть, что при выходе из строя любых  $k$  узлов (или любых  $k$  соединений) она останется связной.*

# Свойства двусвязных графов

**Теорема 3.** Пусть  $G = (V, E)$  — связный граф,  $|V| \geq 3$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) граф  $G$  — двусвязен;
- 2) любые две вершины  $v, w \in V$  принадлежат какому-то простому циклу;
- 3) любая вершина  $v \in V$  и любое ребро  $e \in E$  принадлежат некоторому простому циклу;
- 4) любые два ребра  $e_1, e_2 \in E$  принадлежат какому-то простому циклу;
- 5) для любых двух вершин  $u, w \in V$  и любого ребра  $e \in E$  в графе  $G$  найдется простая  $(u, w)$ -цепь, проходящая через ребро  $e$ ;
- 6) для любых трех вершин  $u, v, w \in V$  в графе  $G$  найдется простая  $(u, w)$ -цепь, проходящая через вершину  $v$ ;
- 7) для любых трех вершин  $u, v, w \in V$  в графе  $G$  найдется простая  $(u, w)$ -цепь, не проходящая через вершину  $v$ .

# $G$ — двусвязен $\Rightarrow$ простой цикл с $v, w$

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ .

Пусть  $C_0$  — простой цикл, содержащий вершину  $v$ .

Если  $C_0$  содержит вершину  $w$ , то он искомый.

$G$  — двусвязен  $\Rightarrow$  простой цикл с  $v, w$ 

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ .

Иначе выберем на  $C_0$  такую вершину  $u \in V$ ,  $u \neq v$ , что простая  $(u, w)$ -цепь  $P_0$  пересекается с  $C_0$  только по вершине  $u$ .

Т. к.  $u$  — не точка сочленения, найдется простая  $(v, w)$ -цепь  $Q$ , не проходящая через вершину  $u$ .

Пусть  $v_1$  — первая вершина, принадлежащая циклу  $C_0$ , при движении по цепи  $Q$  от вершины  $w$  к вершине  $v$  и  $Q_0$  — соответствующая простая  $(w, v_1)$ -цепь.

Пусть  $R_1$  — часть цикла  $C_0$  от вершины  $v$  до вершины  $v_1$ , не содержащая вершину  $u$ , и  $R_2$  — часть цикла  $C_0$  от вершины  $v$  до вершины  $u$ , не содержащая вершину  $v_1$ .

# $G$ — двусвязен $\Rightarrow$ простой цикл с $v, w$

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ .

Пусть  $u_1$  — первая вершина, принадлежащая цепи  $P_0$ , при движении по цепи  $Q_0$  от вершины  $v_1$  к вершине  $w$  и  $Q_1$  — соответствующая простая  $(v_1, u_1)$ -цепь.

Пусть  $R_3$  и  $P_1$  — соответственно  $(u, u_1)$  и  $(u_1, w)$  части цепи  $P_0$ . Отметим, что длина простой цепи  $P_1$  меньше длины простой цепи  $P_0$ .

Рассмотрим простой цикл  $C_1 = vR_1v_1Q_1u_1R_3uR_2v$ .

Повторим рассуждения для простого цикла  $C_1$ , вершины  $u_1$  и простой цепи  $P_1$ .

Через конечное число шагов получим простой цикл, проходящий через вершины  $v, w$ .

$G$  — двусвязен  $\Rightarrow$  простой цикл с  $v, w$

простой цикл с  $v, w \Rightarrow$  простой цикл с  $v, e$ 

**Доказательство.**  $2 \Rightarrow 3$ .

Пусть  $e = (u, w)$ . Тогда найдется простой цикл  $C_1$ , содержащий  $v, u$ .

Если вершина  $w$  лежит на цикле  $C_1$ , то пусть  $P_1$  — простая  $(u, w)$ -цепь, образованная частью цикла  $C_1$  от вершины  $v_1$  к вершине  $u$ , содержащей вершину  $v$ .

Тогда искомым циклом  $C = uP_1w(w, u)u$ .

Если вершина  $w$  не лежит на цикле  $C_1$ , то найдем простой цикл  $C_2$ , содержащий вершины  $v, w$ . Пусть  $v_1$  — первая вершина на цикле  $C_1$  при движении от вершины  $w$  к вершине  $v$  по циклу  $C_2$  и  $P_2$  — соответствующая простая  $(w, v_1)$ -цепь.

Пусть  $P_3$  — простая  $(v_1, u)$ -цепь, образованная частью цикла  $C_1$  от вершины  $v_1$  к вершине  $u$ , содержащей вершину  $v$ . Тогда искомым циклом  $C = u(u, w)wP_2v_1P_3u$ .

простой цикл с  $v, w \Rightarrow$  простой цикл с  $v, e$



простой цикл с  $v$ ,  $e \Rightarrow$  простой цикл с  $e_1, e_2$

**Доказательство.**  $3 \Rightarrow 4$ .

Доказывается, как предыдущий случай.

простой цикл с  $e_1, e_2 \Rightarrow$  простая  $(u, w)$ -цепь с  $e$

**Доказательство.**  $4 \Rightarrow 5$ .

Пусть  $e_1 = (u, v_1) \in E$ ,  $e_2 = (w, v_2) \in E$ . Тогда найдутся простой цикл  $C_1$ , содержащий ребра  $e_1, e$ , и простой цикл  $C_2$ , содержащий ребра  $e_2, e$ .

Пусть  $u_1$  — первая вершина, принадлежащая циклу  $C_2$ , при движении от вершины  $u$  по циклу  $C_1$  и  $P_1$  — соответствующая простая  $(u, u_1)$ -цепь.

Пусть  $P_2$  — простая  $(u_1, w)$ -цепь, образованная частью цикла  $C_2$ , содержащей ребро  $e$ .

Тогда искомая простая цепь  $C = uP_1u_1P_2w$ .

простой цикл с  $e_1, e_2 \Rightarrow$  простая  $(u, w)$ -цепь с  $e$

простая  $(u, w)$ -цепь с  $e \Rightarrow$  простая  $(u, w)$ -цепь с  $v$

**Доказательство.** 5  $\Rightarrow$  6.

Пусть  $e = (v, v_1) \in E$ .

Тогда искомая простая цепь — простая  $(u, w)$ -цепь,  
проходящая через ребро  $e$ .

простая  $(u, w)$ -цепь с  $v \Rightarrow$  простая  $(u, w)$ -цепь без  $v$

**Доказательство.** 6  $\Rightarrow$  7.

Рассмотрим простую  $(v, w)$ -цепь  $P$ , проходящую через вершину  $u$ .

Тогда искомая простая цепь — часть цепи  $P$  от вершины  $u$  до вершины  $w$ .

простая  $(u, w)$ -цепь без  $v \Rightarrow G$  — двусвязен

**Доказательство.**  $7 \Rightarrow 1$ .

Если для каких-то вершин  $u, v, w \in V$  каждая простая  $(u, w)$ -цепь проходит через вершину  $v$ , то  $v$  — точка сочленения, чего не может быть.



# Свойства графов без мостов

**Теорема 4.** Пусть  $G = (V, E)$  — связный граф,  $|V| \geq 3$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) в графе  $G$  нет мостов;
- 2) любые две вершины  $v, w \in V$  принадлежат какому-то циклу;
- 3) любая вершина  $v \in V$  и любое ребро  $e \in E$  принадлежат некоторому циклу;
- 4) любые два ребра  $e_1, e_2 \in E$  принадлежат какому-то циклу;
- 5) для любых двух вершин  $u, w \in V$  и любого ребра  $e \in E$  в графе  $G$  найдется  $(u, w)$ -цепь, проходящая через ребро  $e$ ;
- 6) для любых двух вершин  $u, w \in V$  и любого ребра  $e \in E$  в графе  $G$  найдется  $(u, w)$ -цепь, не проходящая через ребро  $e$ ;
- 7) для любых трех вершин  $u, v, w \in V$  в графе  $G$  найдется  $(u, w)$ -цепь, проходящая через вершину  $v$ .

# Компоненты двусвязности

Максимальный (по включению) двусвязный подграф связного графа  $G = (V, E)$  называется его **компонентой двусвязности**, или **блоком**.

Каждая компонента двусвязности связного графа либо содержит не менее трех вершин, либо совпадает с графом  $K_2$ , либо совпадает с графом  $K_1$  (если исходный граф совпадает с  $K_1$ ).

Если граф  $G$  — двусвязный, то он является своей единственной компонентой двусвязности.



# Компоненты двусвязности

Пусть  $G = (V, E)$  — связный граф. Рассмотрим отношение  $R \subseteq E^2$  на множестве его ребер  $E$ : если  $e_1, e_2 \in E$ , то  $R(e_1, e_2)$  в том случае, когда либо  $e_1 = e_2$ , либо в графе  $G$  найдется простой цикл, содержащий ребра  $e_1$  и  $e_2$ .

Несложно проверить, что  $R$  — отношение эквивалентности на множестве ребер  $E$ .

Пусть  $E_1, \dots, E_s \subseteq E$  — все классы эквивалентности множества  $E$  по отношению  $R$ , и  $V_1, \dots, V_s \subseteq V$  — множества вершин из  $V$ , являющихся концами ребер соответственно из этих множеств.

Тогда  $B_i = (V_i, E_i)$  — компонента двусвязности графа  $G$ ,  $i = 1, \dots, s$ , и  $B_1, \dots, B_s$  — все его компоненты двусвязности.

Точки сочленения и мосты  
○○○○○

Двусвязность  
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Компоненты двусвязности  
○○●○○○○○○○

Деревья блоков и точек сочленения  
○○○○○○○○○

# Компоненты двусвязности

# Свойства компонент двусвязности

**Предложение 1.** Пусть  $G = (V, E)$  — связный граф. Тогда

- 1) если компонента двусвязности  $B$  графа  $G$  содержит вершины  $u, w$ , то она содержит и любую простую  $(u, w)$ -цепь графа  $G$ ;
- 2) если компонента двусвязности  $B$  графа  $G$  содержит вершины  $u, w$ , то она содержит и любой простой цикл, проходящий через вершины  $u, w$  в графе  $G$ ;
- 3) любые две компоненты двусвязности  $B_1, B_2$  графа  $G$  имеют не более одной общей вершины, и если общая вершина есть, то она является точкой сочленения в графе  $G$ .

# Свойства компонент двусвязности

**Доказательство.** 1. Пусть  $P$  — простая  $(u, w)$ -цепь в графе  $G$ .

Вершины  $u, w$  принадлежат компоненте двусвязности  $B$  графа  $G$ . Поэтому для некоторых ребер  $e_1 = (u, v_1)$  и  $e_2 = (w, v_2)$  в графе  $G$  найдется цикл  $C$ , содержащий  $e_1, e_2$ .

Пусть  $P_1$  — часть цикла  $C$  от вершины  $u$  по ребру  $e_1$  до первой вершины  $u_1$ , принадлежащей цепи  $P$ .

Пусть  $P_2$  — часть цепи  $P$  от вершины  $u_1$  до вершины  $u$ .

Тогда  $C_1 = uP_1v_1P_2u$  — простой цикл в графе  $G$ , содержащий ребро  $e_1$ .

Значит, все ребра цепи  $P_2$  принадлежат компоненте двусвязности  $B$ .

Далее повторяем рассуждения для простой  $(u_1, w)$ -цепи, состоящей из части цепи  $P$  от вершины  $u_1$  до вершины  $w$ .

Точки сочленения и мосты  
○○○○○

Двусвязность  
○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Компоненты двусвязности  
○○○○●○○○

Деревья блоков и точек сочленения  
○○○○○○○○

# Свойства компонент двусвязности

## Свойства компонент двусвязности

**Доказательство.** 2. Следует из п. 1, т. к. каждый простой цикл, проходящий через вершины  $u, w$ , разбивается на две простые  $(u, w)$ -цепи.

## Свойства компонент двусвязности

**Доказательство.** 3. Пусть  $u, w$  — две общие вершины компонент двусвязности  $B_1, B_2$ . Рассмотрим произвольную вершину  $v$  компоненты  $B_1$ .

Граф  $B_1$  — двусвязный, поэтому в нем найдется простая  $(u, w)$ -цепь  $P$ , проходящая через вершину  $v$ .

Вершины  $u, w$  принадлежат компоненте двусвязности  $B_2$ , поэтому ей принадлежит и любая простая  $(u, w)$ -цепь, в том числе и цепь  $P$ .

Значит, вершина  $v$  принадлежит компоненте  $B_2$ .

В обратную сторону аналогично.

Следовательно, компоненты  $B_1$  и  $B_2$  совпадают.

# Свойства компонент двусвязности

## Доказательство.

Если  $v$  — единственная общая точка компонент двусвязности  $B_1, B_2$ , то рассмотрим произвольное ребро  $e_1 = (v, u_1)$  в  $B_1$  и произвольное ребро  $e_2 = (v, u_2)$  в  $B_2$ .

Если в графе  $G - v$  вершины  $u_1, u_2$  находятся в одной компоненте связности, то в  $G - v$  найдется простая  $(u_1, u_2)$ -цепь  $P$ .

Значит, в графе  $G$  найдется простой цикл  $C = ve_1u_1Pu_2e_2v$ , т. е. ребра  $e_1, e_2$  принадлежат одной компоненте двусвязности графа  $G$ , что не так.

Поэтому в графе  $G - v$  вершины  $u_1, u_2$  находятся в разных компонентах связности, т. е.  $G - v$  — несвязный граф.

Значит, вершина  $v$  — точка сочленения.



# Свойства компонент двусвязности

# Граф блоков и точек сочленения

Пусть  $G = (V, E)$  — связный граф,  $B_G, C_G$  — соответственно множества его блоков (компонент двусвязности) и точек сочленения.

Тогда двудольный граф

$$BC(G) = (V', E'),$$

где  $V' = B_G \cup C_G$  и  $(b, c) \in E', b \in B_G, c \in C_G$ , если блок  $b$  содержит точку сочленения  $c$ , называется его **графом блоков и точек сочленения**.

Точки сочленения и мосты  
○○○○○

Двусвязность  
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Компоненты двусвязности  
○○○○○○○○○○

Деревья блоков и точек сочленения  
○●○○○○○○○

# Граф блоков и точек сочленения

# Граф блоков и точек сочленения

**Теорема 5.** Для каждого связного графа  $G = (V, E)$  его граф  $BC(G)$  блоков и точек сочленения является деревом, в котором висячими вершинами являются только блоки.

# Граф блоков и точек сочленения

**Доказательство.** 1. Сначала покажем от обратного, что в графе  $BC(G)$  отсутствуют циклы. Пусть в графе  $BC(G)$  найдется простой цикл

$$C' = c_1, b_1, c_2, b_2, \dots, c_m, b_m, c_1,$$

где  $b_1, \dots, b_m \in B_G$ ,  $c_1, \dots, c_m \in C_G$ . Тогда в каждом блоке  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , выделим простую  $(c_i, c_{i+1})$ -цепь  $P_i$ . Получим простой цикл в графе  $G$ :

$$C = c_1 P_1 c_2 P_2 \dots c_m P_m c_1.$$

Значит, вершины  $c_1, \dots, c_m$  принадлежат одной компоненте двусвязности графа  $G$ , т. е.  $m = 1$ .

# Граф блоков и точек сочленения

# Граф блоков и точек сочленения

**Доказательство.** 2. Граф  $BC(G)$  является связным, т. к. граф  $G$  является связным.

3. Теперь покажем, что любая вершина  $s \in C_G$  не может быть висячей в графе  $BC(G)$ . Если  $s \in C_G$ , то граф  $G - s$  — не связный. Значит, найдутся вершины  $u, w \in V$ , принадлежащие разным компонентам связности графа  $G - s$ , а значит, разным компонентам двусвязности графа  $G$ .

Поэтому в графе  $BC(G)$  вершина  $s$  смежна по меньшей мере с двумя вершинами, т. е. не является висячей.

□

# Граф блоков и точек сочленения



# Дерево блоков и точек сочленения

Дерево блоков и точек сочленения  $BC(G)$  связного графа  $G$  называется его *bc-деревом*.

Каждая висячая вершина дерева  $BC(G)$  является блоком (т. е. компонентой двусвязности) связного графа  $G$ .

Компонента двусвязности графа  $G$ , являющаяся висячей вершиной в дереве  $BC(G)$ , называется **висячим**, или **концевым блоком** графа  $G$ .

Каждый связный граф хотя бы с двумя компонентами двусвязности содержит не менее двух висячих блоков.

Точки сочленения и мосты  
○○○○○

Двусвязность  
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Компоненты двусвязности  
○○○○○○○○○○

Деревья блоков и точек сочленения  
○○○○○○○●

# Дерево блоков и точек сочленения

## Краткий итог лекции

1. Двусвязность — желательное свойство графов. Если связный граф не является двусвязным, то в нем можно выделить компоненты двусвязности (блоки) и точки сочленения. Любые два блока графа содержат не более одной общей вершины, являющейся точкой сочленения.
2. Граф блоков и точек сочленения  $BC(G)$  связного графа  $G$  является деревом.
3. В любом связном графе все компоненты двусвязности и точки сочленения (а значит, и его  $bc$ -дерево) можно найти быстрым (полиномиальным) алгоритмом (поиском в глубину в графе).

# Задачи

1. Найти число неизоморфных неразделимых графов  $G = (V, E)$ , если:

- 1)  $|V| = 3$ ;
- 2)  $|V| = 4$ ;
- 3)  $|E| = 5$ ;
- 4)  $|E| = 6$ .

Изобразить эти неизоморфные графы.

3. Найти число неизоморфных графов  $G = (V, E)$  без мостов, если:

- 1)  $|V| = 3$ ;
- 2)  $|V| = 4$ ;
- 3)  $|E| = 5$ ;
- 4)  $|E| = 6$ .

Изобразить эти неизоморфные графы.

# Задачи

3. Найти число неизоморфных графов  $G = (V, E)$  без мостов, если:

- 1)  $|V| = 5$  и в  $G$  хотя бы одна точка сочленения;
- 2)  $|V| = 6$  и в  $G$  хотя бы одна точка сочленения;
- 3)  $|V| = 7$  и в  $G$  ровно одна точка сочленения;
- 4)  $|V| = 8$  и в  $G$  ровно одна точка сочленения.

Изобразить эти неизоморфные графы.

4. Найти все блоки, точки сочленения и мосты в графе  $G = (V, E)$ , где  $V = \{1, 2, \dots, 10\}$ , при этом граф  $G$  содержит ребро  $(7, 8) \in E$  и еще циклы  $C_1 = 1, 2, 3, 1$ ,  $C_2 = 3, 4, 5, 3$ ,  $C_3 = 3, 6, 7, 3$ ,  $C_4 = 8, 9, 10$ . Найти дерево  $BC(G)$  и висячие блоки графа  $G$ .

# Задачи

5. Какое наименьшее число ребер надо удалить из графа  $G$ , чтобы оставшийся граф
- а) содержал точку сочленения; б) содержал мост, если
  - 1)  $G = K_4$ ;
  - 2)  $G = K_5$ .
6. Доказать теорему 2.
7. Обосновать переход  $3 \Rightarrow 4$  в теореме 3.
8. Доказать теорему 4.

## Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 133–134, 137–141, 327–334.
2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 41–44, 53–54.
3. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. С. 101–105.

Конец лекции