

**Решение задач семинара № 5 по курсу “Основы кибернетики”
для групп 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ.
Тема: “Сложность булевых функций и методы синтеза схем на основе
ДНФ”**

На этом занятии речь пойдет о построении схем из функциональных элементов (СФЭ) и контактных схем (КС), реализующих булевы функции.

Напомним, что сложностью СФЭ S' называется число $L(S')$ функциональных элементов в ней, а сложностью КС S'' называется число $L(S'')$ контактов в ней.

Под сложностью реализации системы булевых функций F в классе СФЭ над базисом B понимается величина

$$L_B^C(F) = \min_{\text{СФЭ } S \text{ над } B, \text{ реализ. } F} L(S).$$

Если $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, то нижний индекс в $L_B^C(F)$ не пишется.

Аналогично, под сложностью реализации системы булевых функций F в классе КС понимается величина

$$L^{\text{КС}}(F) = \min_{\text{КС } S, \text{ реализ. } F} L(S).$$

В основе построения схем, изучаемых на этом занятии, лежат формульные представления функций в виде ДНФ или КНФ, которые, возможно, подверглись дальнейшим преобразованиям.

Для получения нижних оценок сложности схем могут оказаться полезными следующие утверждения.

Утверждение 16.1 *Если булева функция (БФ) $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n.$$

Если при этом БФ f не является монотонной БФ (каждая БП $x_i, i \in \{1, \dots, k\}$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП БФ f), то

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n + k).$$

Утверждение 16.2 *Для системы $F = (f_1, \dots, f_m)$, состоящей из попарно различных БФ, отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m).$$

Утверждение 16.3 *Если для существенной БП x_n БФ $f, f \in P_2(n)$, и для любого (некоторого) $\sigma, \sigma \in B$, БФ $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0, 1$, то*

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=0}), L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=1})\} + 2$$

(соответственно $L_{\&, \vee}^C(f) \geq L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=\sigma}) + 1$).

Утверждение 16.4 Если система БФ $F = (f_1, \dots, f_m)$ состоит из попарно различных БФ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

Пронумерованные задачи взяты (в ряде случаев — с незначительными модификациями) из главы X задачника [1].

1.1(2). Для булевой функции $x \sim y$ построить схему из функциональных элементов (СФЭ) сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и контактную схему (КС) сложности 4. Доказать минимальность построенных схем.

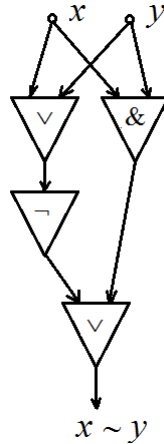


Рис. 1.

Решение. 1) СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $x \sim y$, приведена на рис. 1 и моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$x \sim y = \bar{x}\bar{y} \vee xy = \overline{(x \vee y)} \vee xy$$

(некоторая экономия достигается за счет применения правила де Моргана).

Докажем минимальность этой схемы, т. е. докажем, что $L^C(x \sim y) \geq 4$. Заметим, что в силу принципа двойственности:

$$L^C(x \oplus y) = L^C(x \sim y), \quad (1)$$

ибо $x \oplus y = (x \sim y)^*$. Предположим, что $L^C(x \sim y) \leq 3$, и пусть S — минимальная схема, реализующая одну из функций $x \oplus y, x \sim y$. Заметим: выходной элемент схемы S в силу ее минимальности не может быть инвертором, так как иначе на выходе элемента, выход которого подается на вход этого инвертора, реализуется другая из функций $x \oplus y, x \sim y$ (поскольку $x \oplus y = \overline{(x \sim y)}$), — противоречие с равенством (1). Значит, выходной элемент E схемы S — двухходовый. С учетом принципа двойственности можно, не ограничивая общности, считать, что E — конъюнктор. Невозможно, чтобы на какой-то вход E подавалась бы дуга, ведущая от входа схемы: допустим, ко входу E ведет дуга от входа x , тогда, полагая $x = 0$, получаем, что, независимо от значения y , на выходе S возникает 0, но тогда S не может реализовать ни $x \oplus y$, ни $x \sim y$. Также невозможен (в силу минимальности S) случай подачи на входы E дуг, ведущих от одного функционального элемента. Значит, ко входам E ведут дуги от разных элементов E', E'' . Но тогда в S уже имеется 3 элемента. Заметим: обе функции $x \oplus y,$

$x \sim y$ — немонотонные. Поэтому хотя бы один из элементов E', E'' — инвертор, и к его входу ведет дуга от входа схемы, — допустим, от входа x . Тогда, полагая $x = 1$, увидим: независимо от значения y , на выходе S возникает 0, но в этом случае S не может реализовать ни $x \oplus y$, ни $x \sim y$. Противоречие. Значит, $L^C(x \oplus y) \geq 4$, ч. т. д.

2) КС сложности 4, реализующая функцию $x \sim y$, приведена на рис. 2 и моделирует формулу $\bar{x}\bar{y} \vee xy$.

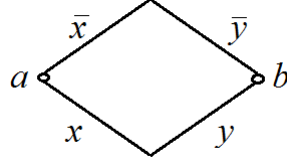


Рис. 2.

Минимальность этой схемы легко устанавливается на основании следующего утверждения: *если у булевой функции f имеется n существенных переменных, и среди них есть k переменных, по каждой из которых эта функция немонотонна и не инмонотонна (т. е. не антимонотонна), то $L^{KC}(f) \geq n + k$.*

Заметим: у функции $x \sim y$ имеется 2 существенных переменных, по каждой из которых эта функция немонотонна и не инмонотонна, значит, $L^{KC}(x \sim y) \geq 2 + 2 = 4$, ч. т. д.

1.1(3). Для булевой функции $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ построить СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и КС сложности 5. Доказать минимальность построенных схем.

Решение. 1) СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $m(x_1, x_2, x_3)$, моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$$

(некоторая экономия достигается за счет применения тождества дистрибутивности).

Докажем минимальность этой схемы, т. е. докажем, что $L^C(m) \geq 4$.

Предположим, что $L^C(m) \leq 3$, и пусть S — минимальная схема, реализующая функцию m .

Пусть E — ближайший к выходу схемы двухвходовый элемент схемы S (т. е. либо E — выходной элемент, либо от E к выходу схемы ведет цепочка инверторов). С учетом принципа двойственности, а также самодвойственности функции m можно, не ограничивая общности, считать, что E — конъюнктор.

Невозможно, чтобы на какой-то вход E подавалась бы дуга, ведущая от входа схемы: допустим, ко входу E ведет дуга от входа x_i , тогда, полагая $x_i = 0$, получаем, что, независимо от значений двух других переменных, на выходе S возникает одно и то же значение, но тогда S не может реализовывать $m(x_1, x_2, x_3)$.

Также невозможен (в силу минимальности S) случай подачи на входы E дуг, ведущих от одного функционального элемента.

Значит, ко входам E ведут дуги от разных элементов E', E'' . Но тогда в S уже имеется 3 элемента E, E', E'' . Это означает, что других элементов в схеме нет, а элемент E — выходной элемент схемы.

Ни один из элементов E', E'' не может быть инвертором. Действительно, пусть, не ограничивая общности, E' — инвертор, на вход которого подается переменная x_i . Тогда, полагая $x_i = 1$, заметим: значение на выходе схемы S равно 0 независимо от

значений остальных переменных. Но такая схема S не может реализовывать функцию m .

Ни один из элементов E' , E'' не может быть конъюнктом. Действительно, пусть, не ограничивая общности, E' — конъюнктом, на один из входов которого подается переменная x_i . Тогда, полагая $x_i = 0$, заметим: значение на выходе схемы S равно 0 независимо от значений остальных переменных. Но такая схема S не может реализовывать функцию m .

Значит, оба элемента E' , E'' — дизъюнкты. У этих элементов в совокупности имеется 4 входа, а булева функция m зависит от 3 переменных. Следовательно, по крайней мере одна переменная, — скажем, x_i , — подается по крайней мере на 2 из 4 входов элементов E' , E'' . Если среди таких входов имеются два входа одного элемента, то этот элемент выполняет роль тождественной функции, и его можно было бы удалить из схемы, что противоречит минимальности схемы S . Если же имеет место иная ситуация, то, полагая $x_i = 1$, получим на выходе схемы значение 1 независимо от значений других переменных. Но в этом случае S не может реализовывать функцию m . Противоречие. Значит, $L^C(m) \geq 4$, ч. т. д.

2) КС сложности 5, реализующая функцию m , моделирует формулу $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$.

Установим минимальность этой схемы. Предположим, что $L^{KC}(m) \leq 4$, и пусть S — минимальная двухполюсная КС, реализующая функцию m .

Оказывается, никакой контакт в S не может соединять два полюса схемы. Действительно, если бы такой контакт x_i^σ ($i \in \{1, 2, 3\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$) нашелся бы, то схема проводила бы всякий раз, когда $x_i = \sigma$, но в этом случае она не могла бы реализовывать функцию m .

Аналогично, в S нет полюса, которому был бы инцидентен ровно один контакт. Действительно, если бы такой полюс существовал и ему был бы инцидентен контакт x_i^σ ($i \in \{1, 2, 3\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$), то схема не проводила бы всякий раз, когда $x_i = \bar{\sigma}$, но в этом случае она не могла бы реализовывать функцию m .

Теперь ясно, что, в силу предположения $L(S) \leq 4$, схема S моделирует либо формулу $x_{i_1}^{\sigma_1}x_{i_2}^{\sigma_2} \vee x_{i_3}^{\sigma_3}x_{i_4}^{\sigma_4}$ (рис. 3), либо формулу $(x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2})(x_{i_3}^{\sigma_3} \vee x_{i_4}^{\sigma_4})$ (рис. 4), $i_j \in \{1, 2, 3\}$, $\sigma_j \in \{0, 1\}$, $j = \overline{1, 3}$.

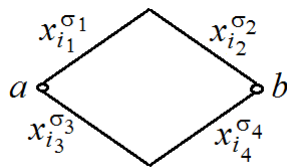


Рис. 3.

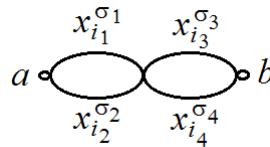


Рис. 4.

Рассмотрим сначала случай моделирования схемой S формулы $x_{i_1}^{\sigma_1}x_{i_2}^{\sigma_2} \vee x_{i_3}^{\sigma_3}x_{i_4}^{\sigma_4}$. В силу минимальности этой схемы $i_1 \neq i_2$, $i_3 \neq i_4$.

Если бы существовало число j , $j \in \{1, 2, 3\}$, такое, что $\sigma_j = 0$, то схема S не могла бы реализовывать функцию m . Действительно, пусть, например, $j = 1$ и $\sigma_1 = 0$. Тогда схема проводит всякий раз, когда $x_{i_1} = 0$ и $x_{i_2} = \sigma_2$, что невозможно.

Следовательно, схема S моделирует формулу $x_{i_1}x_{i_2} \vee x_{i_3}x_{i_4}$. Поскольку $m(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит ровно от 3 переменных, имеем: найдутся неравные друг другу k, l (лежащие в множестве $\{1, 2, 3\}$) такие, что $i_k = i_l$. Но тогда при $x_{i_k} = 0$ схема S не проводит, и, значит, не реализует функцию m .

Остается рассмотреть случай моделирования схемой S формулы $(x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2})(x_{i_3}^{\sigma_3} \vee x_{i_4}^{\sigma_4})$. В силу минимальности этой схемы $i_1 \neq i_2$, $i_3 \neq i_4$.

Если бы существовало число j , $j \in \{1, 2, 3\}$, такое, что $\sigma_j = 0$, то схема S не могла бы реализовывать функцию m . Действительно, пусть, например, $j = 1$ и $\sigma_1 = 0$. Тогда схема не проводит всякий раз, когда $x_{i_1} = 1$ и $x_{i_2} = \bar{\sigma}_2$, что невозможно.

Следовательно, схема S моделирует формулу $(x_{i_1} \vee x_{i_2})(x_{i_3} \vee x_{i_4})$. Поскольку $m(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит ровно от 3 переменных, имеем: найдутся неравные друг другу k, l (лежащие в множестве $\{1, 2, 3\}$) такие, что $i_k = i_l$. Но тогда при $x_{i_k} = 1$ схема S проводит, и, значит, не реализует функцию m .

Итак: схема S сложности не более 4 не может реализовывать функцию m , поэтому $L^{\text{KC}}(m) \geq 4$, ч. т. д.

1.1(4). Для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = (01111110)$ построить СФЭ сложности 6 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и КС сложности 6. Доказать минимальность построенной КС.

Решение. 1) СФЭ сложности 6 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\overline{(x_1 x_2 x_3)}$$

(некоторая экономия достигается за счет применения правила де Моргана).

2) КС сложности 6, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует формулу $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Минимальность этой схемы легко устанавливается на основании уже упомянутого утверждения: *если у булевой функции f имеется n существенных переменных, и среди них есть k переменных, по каждой из которых эта функция не монотонна и не инмонотонна (т. е. не антимонотонна), то $L^{\text{KC}}(f) \geq n + k$.*

Заметим: у функции f имеется 3 существенных переменных, по каждой из которых эта функция не монотонна и не инмонотонна. В силу симметричности функции f этот факт достаточно установить для переменной x_1 . Поскольку $f(0, 0, 0) = 0$ и $f(1, 0, 0) = 1$, функция f не инмонотонна по переменной x_1 . Поскольку $f(1, 1, 1) = 0$ и $f(0, 1, 1) = 1$, функция f не монотонна по переменной x_1 . Значит, $L^{\text{KC}}(f) \geq 3 + 3 = 6$, ч. т. д.

Задача. Для мультиплексорной функции порядка 1 $\mu_1(x_1, y_0, y_1) = \bar{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$ построить минимальную СФЭ в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и минимальную КС. Обосновать минимальность построенных схем.

Решение. 1) СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $\mu_1(x_1, y_0, y_1)$, моделирует формулу $\bar{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$.

Докажем минимальность этой схемы, т. е. докажем, что $L^{\text{C}}(\mu_1) \geq 4$.

Предположим, что $L^{\text{C}}(\mu_1) \leq 3$, и пусть S — минимальная схема, реализующая функцию μ_1 .

Пусть E — ближайший к выходу схемы двухвходовый элемент схемы S (т. е. либо E — выходной элемент, либо от E к выходу схемы ведет цепочка инверторов).

Невозможно, чтобы на какой-то вход E подавалась бы дуга, ведущая от входа схемы: допустим, ко входу E ведет дуга от входа x_i , тогда, полагая $x_i = 0$ для случая, когда E — конъюнктор, и полагая $x_i = 1$ для случая, когда E — дизъюнктор, получаем, что на выходе S возникает одно и то же значение независимо от значений двух других переменных, но тогда S не может реализовывать μ_1 .

Также невозможен (в силу минимальности S) случай подачи на входы E дуг, ведущих от одного функционального элемента.

Значит, ко входам E ведут дуги от разных элементов E', E'' . Но тогда в S уже имеется 3 элемента E, E', E'' . Это означает, что других элементов в схеме нет, а элемент E — выходной элемент схемы.

Ни один из элементов E' , E'' не может быть инвертором. Действительно, пусть, не ограничивая общности, E' — инвертор, на вход которого подается переменная x_i . Тогда, полагая $x_i = 1$ для случая, когда E — конъюнктор, и полагая $x_i = 0$ для случая, когда E — дизъюнктор, заметим: значение на выходе схемы S фиксировано независимо от значений остальных переменных. Но такая схема S не может реализовывать функцию μ_1 .

Но в этом случае получаем, что функция, реализуемая схемой S , — монотонная, в отличие от μ_1 . (Немонотонность μ_1 следует из того, что $\mu_1(0, 1, 0) = 1$ и $\mu_1(1, 1, 0) = 0$). Противоречие. Значит, $L^C(\mu_1) \geq 4$, ч. т. д.

2) КС сложности 4, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует формулу $\bar{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$.

Заметим: у функции μ_1 имеется 3 существенных переменных, по одной из которых (x_1) эта функция не монотонна и не инмонотонна. (Поскольку $\mu_1(0, 1, 0) = 1$ и $\mu_1(1, 1, 0) = 0$, функция μ_1 не монотонна по переменной x_1 . Поскольку $\mu_1(0, 0, 1) = 0$ и $\mu_1(1, 0, 1) = 1$, функция μ_1 не инмонотонна по переменной x_1). Значит, $L^{KC}(\mu_1) \geq 3 + 1 = 4$, ч. т. д.

Задача. Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee (\bar{x}_1 \vee x_2)x_4$ построить минимальную КС. Обосновать минимальность этой схемы.

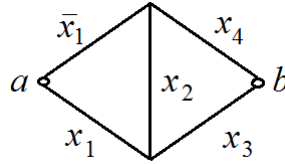


Рис. 5.

Решение. КС сложности 5, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, приведена на рис. 5.

Заметим: у функции f имеется 4 существенных переменных, по одной из которых (x_1) эта функция не монотонна и не инмонотонна. (Поскольку $f(0, 0, 0, 1) = 1$ и $f(1, 0, 0, 1) = 0$, функция f не монотонна по переменной x_1 . Поскольку $f(0, 0, 1, 0) = 0$ и $f(1, 0, 1, 0) = 1$, функция f не инмонотонна по переменной x_1). Значит, $L^{KC}(f) \geq 4 + 1 = 5$, ч. т. д.

2.4(1). Для функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3$ построить минимальную КС. Обосновать минимальность этой схемы.

Решение. КС сложности 6, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3 = \bar{x}_1(x_2 x_3) \vee \overline{x_1(x_2 x_3)} = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Заметим: у функции f имеется 3 существенных переменных, по каждой из которых эта функция не монотонна и не инмонотонна. (Поскольку $f(0, 0, 0) = 0$ и $f(1, 0, 0) = 1$, функция f не инмонотонна по переменной x_1 . Поскольку $f(0, 1, 1) = 1$ и $f(1, 1, 1) = 0$, функция f не монотонна по переменной x_1 . Поскольку $f(0, 0, 1) = 0$ и $f(0, 1, 1) = 1$, функция f не инмонотонна по переменной x_2 . Поскольку $f(1, 0, 1) = 1$ и $f(1, 1, 1) = 0$, функция f не монотонна по переменной x_2 . Поскольку $f(0, 1, 0) = 0$ и $f(0, 1, 1) = 1$, функция f не инмонотонна по переменной x_3 . Поскольку $f(1, 1, 0) = 1$ и $f(1, 1, 1) = 0$, функция f не монотонна по переменной x_3). Значит, $L^{KC}(f) \geq 3 + 3 = 6$, ч. т. д.

Литература

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.