

Лекция 2. Точки сочленения и мосты.
Связность, k -связность. Двусвязные графы.
Компоненты двусвязности (блоки) графа.
Дерево блоков и точек сочленения графа.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Точки сочленения и мосты

Вершина v графа $G = (V, E)$ называется **точкой сочленения**, или **разделяющей вершиной**, если граф $G - v$ содержит больше компонент связности, чем граф G .

Связный непустой граф без точек сочленения называется **неразделимым** графом, или **блоком**.

Ребро e графа $G = (V, E)$ называется **мостом**, если граф $G - e$ содержит больше компонент связности, чем граф G .

Ясно, что каждая концевая вершина любого моста в графе является точкой сочленения этого графа.

Свойства точек сочленения

Теорема 1. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $v \in V$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) v — точка сочленения;
- 2) найдутся такие вершины $u, w \in V$, $u \neq v$, $w \neq v$, что вершина v принадлежит любой простой (u, w) -цепи;
- 3) существует разбиение множества $V \setminus \{v\}$ на такие части U, W , что для любых вершин $u \in U$, $w \in W$ вершина v принадлежит любой простой (u, w) -цепи.

Свойства точек сочленения

Доказательство.

$1 \Rightarrow 3$. Т. к. v — точка сочленения, граф $G - v$ — не связан, т. е. содержит по меньшей мере две компоненты связности.

Положим U — все вершины одной из этих компонент связности, $W = V \setminus (U \cup \{v\})$. Тогда любые вершины $u \in U$, $w \in W$ лежат в разных компонентах связности графа $G - v$. Значит, любая простая (u, w) -цепь проходит через вершину v .

$3 \Rightarrow 2$, т. к. свойство 2 является частным случаем свойства 3.

$2 \Rightarrow 1$. Если вершина v принадлежит любой простой цепи из вершины u в вершину w , то граф $G - v$ — не связан. Значит, v — точка сочленения.



Свойства мостов

Теорема 2. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $e \in E$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) e — мост;
- 2) e не принадлежит ни одному простому циклу графа G ;
- 3) найдутся такие вершины $u, w \in V$, что ребро e принадлежит любой простой (u, w) -цепи;
- 4) существует разбиение множества V на такие части U, W , что для любых вершин $u \in U, w \in W$ ребро e принадлежит любой простой (u, w) -цепи.

k -связность

Граф $G = (V, E)$ называется k -связным, если при удалении из него не более $(k - 1)$ любых вершин остается связный граф.

Двусвязный граф называется также **неразделимым** графом, или **блоком**.

Граф $G = (V, E)$ называется **реберно k -связным**, если при удалении из него не более $(k - 1)$ любых ребер остается связный граф.

Задача о надежной связной сети

Сеть с p узлами и соединениями между ними — связна, если из каждого узла можно достигнуть любой другой узел (возможно, проходя через промежуточные узлы). Требуется построить такую сеть, что при выходе из строя любых k узлов (или любых k соединений) она останется связной.

Свойства двусвязных графов

Теорема 3. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф, $|V| \geq 3$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) граф G — двусвязен;
- 2) любые две вершины $v, w \in V$ принадлежат какому-то простому циклу;
- 3) любая вершина $v \in V$ и любое ребро $e \in E$ принадлежат некоторому простому циклу;
- 4) любые два ребра $e_1, e_2 \in E$ принадлежат какому-то простому циклу;
- 5) для любых двух вершин $u, w \in V$ и любого ребра $e \in E$ в графе G найдется простая (u, w) -цепь, проходящая через ребро e ;
- 6) для любых трех вершин $u, v, w \in V$ в графе G найдется простая (u, w) -цепь, проходящая через вершину v ;
- 7) для любых трех вершин $u, v, w \in V$ в графе G найдется простая (u, w) -цепь, не проходящая через вершину v .

G — двусвязен \Rightarrow простой цикл с v, w

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

Пусть C_0 — простой цикл, содержащий вершину v .

Если C_0 содержит вершину w , то он искомый.

G — двусвязен \Rightarrow простой цикл с v, w

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

Иначе выберем на C_0 такую вершину $u \in V$, $u \neq v$, что простая (u, w) -цепь P_0 пересекается с C_0 только по вершине u .

Т. к. u — не точка сочленения, найдется простая (v, w) -цепь Q , не проходящая через вершину u .

Пусть v_1 — первая вершина, принадлежащая циклу C_0 , при движении по цепи Q от вершины w к вершине v и Q_0 — соответствующая простая (w, v_1) -цепь.

Пусть R_1 — часть цикла C_0 от вершины v до вершины v_1 , не содержащая вершину u , и R_2 — часть цикла C_0 от вершины v до вершины u , не содержащая вершину v_1 .

G — двусвязен \Rightarrow простой цикл с v, w

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

Пусть u_1 — первая вершина, принадлежащая цепи P_0 , при движении по цепи Q_0 от вершины v_1 к вершине w и Q_1 — соответствующая простая (v_1, u_1) -цепь.

Пусть R_3 и P_1 — соответственно (u, u_1) и (u_1, w) части цепи P_0 . Отметим, что длина простой цепи P_1 меньше длины простой цепи P_0 .

Рассмотрим простой цикл $C_1 = vR_1v_1Q_1u_1R_3uR_2v$.

Повторим рассуждения для простого цикла C_1 , вершины u_1 и простой цепи P_1 .

Через конечное число шагов получим простой цикл, проходящий через вершины v, w .

простой цикл с $v, w \Rightarrow$ простой цикл с v, e

Доказательство. $2 \Rightarrow 3$.

Пусть $e = (u, w)$. Тогда найдется простой цикл C_1 , содержащий v, u .

Если вершина w лежит на цикле C_1 , то пусть P_1 — простая (u, w) -цепь, образованная частью цикла C_1 от вершины v_1 к вершине u , содержащей вершину v .

Тогда искомым циклом $C = uP_1w(w, u)u$.

Если вершина w не лежит на цикле C_1 , то найдем простой цикл C_2 , содержащий вершины v, w . Пусть v_1 — первая вершина на цикле C_1 при движении от вершины w к вершине v по циклу C_2 и P_2 — соответствующая простая (w, v_1) -цепь.

Пусть P_3 — простая (v_1, u) -цепь, образованная частью цикла C_1 от вершины v_1 к вершине u , содержащей вершину v .

Тогда искомым циклом $C = u(u, w)wP_2v_1P_3u$.

простой цикл с v , $e \Rightarrow$ простой цикл с e_1, e_2

Доказательство. $3 \Rightarrow 4$.

Доказывается, как предыдущий случай.

простой цикл с $e_1, e_2 \Rightarrow$ простая (u, w) -цепь с e

Доказательство. $4 \Rightarrow 5$.

Пусть $e_1 = (u, v_1) \in E$, $e_2 = (w, v_2) \in E$. Тогда найдутся простой цикл C_1 , содержащий ребра e_1, e , и простой цикл C_2 , содержащий ребра e_2, e .

Пусть u_1 — первая вершина, принадлежащая циклу C_2 , при движении от вершины u по циклу C_1 и P_1 — соответствующая простая (u, u_1) -цепь.

Пусть P_2 — простая (u_1, w) -цепь, образованная частью цикла C_2 , содержащей ребро e .

Тогда искомая простая цепь $C = uP_1u_1P_2w$.

простая (u, w) -цепь с $e \Rightarrow$ простая (u, w) -цепь с v

Доказательство. 5 \Rightarrow 6.

Пусть $e = (v, v_1) \in E$.

Тогда искомая простая цепь — простая (u, w) -цепь, проходящая через ребро e .

простая (u, w) -цепь с $v \Rightarrow$ простая (u, w) -цепь без v

Доказательство. $6 \Rightarrow 7$.

Рассмотрим простую (v, w) -цепь P , проходящую через вершину u .

Тогда искомая простая цепь — часть цепи P от вершины u до вершины w .

простая (u, w) -цепь без $v \Rightarrow G$ — двусвязен

Доказательство. $7 \Rightarrow 1$.

Если для каких-то вершин $u, v, w \in V$ каждая простая (u, w) -цепь проходит через вершину v , то v — точка сочленения, чего не может быть.

□

Свойства графов без мостов

Теорема 4. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф, $|V| \geq 3$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) в графе G нет мостов;
- 2) любые две вершины $v, w \in V$ принадлежат какому-то циклу;
- 3) любая вершина $v \in V$ и любое ребро $e \in E$ принадлежат некоторому циклу;
- 4) любые два ребра $e_1, e_2 \in E$ принадлежат какому-то циклу;
- 5) для любых двух вершин $u, w \in V$ и любого ребра $e \in E$ в графе G найдется (u, w) -цепь, проходящая через ребро e ;
- 6) для любых двух вершин $u, w \in V$ и любого ребра $e \in E$ в графе G найдется (u, w) -цепь, не проходящая через ребро e ;
- 7) для любых трех вершин $u, v, w \in V$ в графе G найдется (u, w) -цепь, проходящая через вершину v .

Компоненты двусвязности

Максимальный (по включению) двусвязный подграф связного графа $G = (V, E)$ называется его **компонентой двусвязности**, или **блоком**.

Каждая компонента двусвязности связного графа либо содержит не менее трех вершин, либо совпадает с графом K_2 , либо совпадает с графом K_1 (если исходный граф совпадает с K_1).

Если граф G — двусвязный, то он является своей единственной компонентой двусвязности.

Принадлежность компоненте двусвязности

Предложение 1. *Если $G = (V, E)$ — связный граф, то вершины $v, w \in V$ принадлежат одной компоненте двусвязности графа G , не совпадающей с K_2 или с K_1 , тогда и только тогда, когда в графе G найдется простой цикл, содержащий эти вершины.*

Принадлежность компоненте двусвязности

Доказательство. Необходимость следует из свойств двусвязных графов (теорема 3). Докажем достаточность. Пусть $C = vP_1wP_2v$ — простой цикл, содержащий вершины v, w , и P_1, P_2 — соответственно простые (v, w) -цепи, пересекающиеся лишь по начальной и конечной вершинам. Если вершины v, w — из разных компонент двусвязности графа G , то найдется такая точка сочленения $u \in V$, $u \neq v$, $u \neq w$, что в графе $G - u$ вершины v, w лежат в разных компонентах связности.

Но вершина u не может одновременно принадлежать и цепи P_1 , и цепи P_2 .

Значит, в графе $G - u$ найдется (v, w) -путь — противоречие.



Свойства компонент двусвязности

Предложение 2. Если $B = (V_1, E_1)$ — компонента двусвязности графа $G = (V, E)$ и $v \in V_1, w \in V \setminus V_1, (v, w) \in E$, то v точка сочленения графа G .

Доказательство. Пусть $(u, v) \in E_1$.

Если v — не точка сочленения, то найдется простая (u, w) -цепь в графе $G - v$, а значит, и простой цикл

$C = uPw(w, v)v(v, u)u$ в графе G , содержащий вершины u, w .

Получаем $w \in V_1$, чего не может быть.

□

Свойства компонент двусвязности

Предложение 3. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф. Тогда

- 1) если компонента двусвязности B графа G содержит вершины u, w , то она содержит и любую простую (u, w) -цепь графа G ;
- 2) если компонента двусвязности B графа G содержит вершины u, w , то она содержит и любой простой цикл, проходящий через вершины u, w в графе G ;
- 3) любые две компоненты двусвязности B_1, B_2 графа G имеют не более одной общей вершины, и если общая вершина есть, то она является точкой сочленения в графе G .

Свойства компонент двусвязности

Доказательство.

1. Пусть $B = (V_1, E_1)$. Предположим, что найдется простая (u, w) -цепь P , не вся принадлежащая компоненте B , и пусть $(v_1, v_2) \in E$ — первое ребро при движении по цепи P от вершины u к вершине w , для которого $v_1 \in V_1, v_2 \in V \setminus V_1$. Тогда v_1 — точка сочленения, чего не может быть.
2. Следует из п. 1, т. к. каждый простой цикл, проходящий через вершины u, w , разбивается на две простые (u, w) -цепи.

Свойства компонент двусвязности

Доказательство.

3. Пусть u, w — две общие вершины компонент B_1, B_2 .

Рассмотрим произвольную вершину v компоненты B_1 .

Граф B_1 — двусвязный, поэтому в нем найдется простая (u, w) -цепь P , проходящая через вершину v .

Вершины u, w принадлежат компоненте двусвязности B_2 , поэтому ей принадлежит и любая простая (u, w) -цепь, в том числе и цепь P .

Значит, вершина v принадлежит компоненте B_2 .

В обратную сторону аналогично.

Следовательно, компоненты B_1 и B_2 совпадают.

Свойства компонент двусвязности

Доказательство.

Если v — единственная общая точка компонент двусвязности B_1, B_2 , то рассмотрим произвольное ребро (v, w) подграфа B_2 .

Вершина v принадлежит компоненте двусвязности B_1 , а вершина w — ей не принадлежит.

Значит, вершина v — точка сочленения.



Граф блоков и точек сочленения

Пусть $G = (V, E)$ — связный граф, B_G, C_G — соответственно множества его блоков (компонент двусвязности) и точек сочленения.

Тогда двудольный граф $BC(G) = (V', E')$, где $V' = B_G \cup C_G$ и $(b, c) \in E', b \in B_G, c \in C_G$, если блок b содержит точку сочленения c , называется его **графом блоков и точек сочленения**.

Граф блоков и точек сочленения

Теорема 5. *Для каждого связного графа $G = (V, E)$ его граф $BC(G)$ блоков и точек сочленения является деревом, в котором висячими вершинами являются только блоки.*

Граф блоков и точек сочленения

Доказательство. Пусть в графе $BC(G)$ найдется простой цикл

$$C' = c_1 b_1 c_2 b_2 \dots c_m b_m c_1,$$

где $b_1, \dots, b_m \in B_G$, $c_1, \dots, c_m \in C_G$. Тогда в каждом блоке b_i , $i = 1, \dots, m$, выделим простую (c_i, c_{i+1}) -цепь P_i . Получим простой цикл в графе G :

$$C = c_1 P_1 c_2 P_2 \dots c_m P_m c_1.$$

Значит, вершины c_1, \dots, c_m принадлежат одной компоненте двусвязности графа G , т. е. $m = 1$.

Если $c \in C_G$, то граф $G - c$ — не связный. Значит, найдутся вершины $v, w \in V$, принадлежащие разным компонентам связности графа $G - c$. Поэтому в графе $BC(G)$ вершина c смежна по меньшей мере с двумя вершинами, т. е. не является висячей.

Дерево блоков и точек сочленения

Дерево блоков и точек сочленения $BC(G)$ связного графа G называется его *bc-деревом*.

Каждая висячая вершина дерева $BC(G)$ является блоком (т. е. компонентой двусвязности) связного графа G .

Компонента двусвязности графа G , являющаяся висячей вершиной в дереве $BC(G)$, называется **висячим**, или **концевым блоком** графа G .

Каждый связный граф хотя бы с двумя компонентами двусвязности содержит не менее двух висячих блоков.

Краткий итог лекции

1. Двусвязность — желательное свойство графов. Если связный граф не является двусвязным, то в нем можно выделить компоненты двусвязности (блоки) и точки сочленения. Любые два блока графа содержат не более одной общей вершины, являющейся точкой сочленения.
2. Граф блоков и точек сочленения $BC(G)$ связного графа G является деревом.
3. В любом связном графе все компоненты двусвязности и точки сочленения (а значит, и его bc -дерево) можно найти быстрым (полиномиальным) алгоритмом (поиском в глубину в графе).

Задачи

1. Найти число неизоморфных неразделимых графов $G = (V, E)$, если:

- 1) $|V| = 3$;
- 2) $|V| = 4$;
- 3) $|E| = 5$;
- 4) $|E| = 6$.

Изобразить эти неизоморфные графы.

3. Найти число неизоморфных графов $G = (V, E)$ без мостов, если:

- 1) $|V| = 3$;
- 2) $|V| = 4$;
- 3) $|E| = 5$;
- 4) $|E| = 6$.

Изобразить эти неизоморфные графы.

Задачи

3. Найти число неизоморфных графов $G = (V, E)$ без мостов, если:

- 1) $|V| = 5$ и в G хотя бы одна точка сочленения;
- 2) $|V| = 6$ и в G хотя бы одна точка сочленения;
- 3) $|V| = 7$ и в G ровно одна точка сочленения;
- 4) $|V| = 8$ и в G ровно одна точка сочленения.

Изобразить эти неизоморфные графы.

4. Найти все блоки, точки сочленения и мосты в графе $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, 10\}$, при этом граф G содержит ребро $(7, 8) \in E$ и еще циклы $C_1 = 1, 2, 3, 1$, $C_2 = 3, 4, 5, 3$, $C_3 = 3, 6, 7, 3$, $C_4 = 8, 9, 10$. Найти дерево $BC(G)$ и висячие блоки графа G .

Задачи

5. Какое наименьшее число ребер надо удалить из графа G , чтобы оставшийся граф
- а) содержал точку сочленения; б) содержал мост, если
 - 1) $G = K_4$;
 - 2) $G = K_5$.
6. Доказать теорему 2.
7. Обосновать переход $3 \Rightarrow 4$ в теореме 3.
8. Доказать теорему 4.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 133–134, 137–141, 327–334.
2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 41–44, 53–54.
3. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. С. 101–105.

Конец лекции