Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 7

Общая схема метода резолюций
Предварённая нормальная форма
Сколемовская стандартная форма
Системы дизъюнктов
Задача унификации

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020, весенний семестр

Напоминание

Проблему общезначимости формул логики предикатов

$$\models \varphi?$$

можно *до некоторой степени* решить с помощью
метода семантических таблиц

Но этот метод оказался **неэффективным**:

- приходится перебирать много формул
- и подставлять много термов

На ближайших лекциях будет обсуждаться более эффективный метод проверки общезначимости формул логики предикатов:

метод резолюций

Общая схема метода резолюций

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))?$$

Этап 1: $\varphi(\widetilde{x}^n) \rightsquigarrow \psi = \neg\forall\widetilde{x}^n\, \varphi(\widetilde{x}^n)$

$\models \varphi \Leftrightarrow\ \not\models \psi$ (это очевидно?)

$$\dots \rightsquigarrow \neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

Этап 2: $\psi \rightsquigarrow \psi_{pnf}$ — предварённая нормальная форма (ПНФ)

$\psi \sim \psi_{pnf}$

$$\dots \rightsquigarrow \forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 3: $\psi_{pnf} \rightsquigarrow \psi_{ssf}$ — сколемовская стандартная форма (ССФ)

$\not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow\ \not\models \psi_{ssf}$ (но в общем случае $\psi_{pnf} \not\sim \psi_{ssf}$)

$$\dots \rightsquigarrow \forall x\, \forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 4: $\psi_{ssf} \rightsquigarrow S_{\psi_{ssf}}$ — система дизъюнктов

$\not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow\ \not\models S_{\psi_{ssf}}$

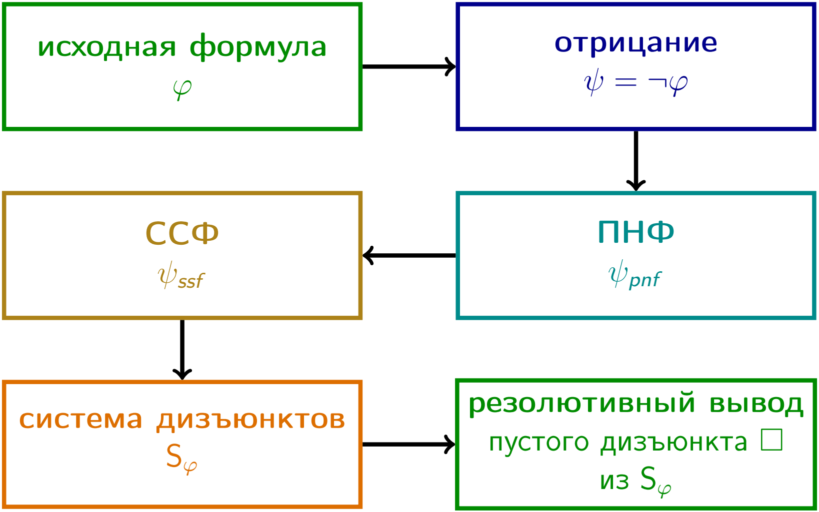
$$\dots \rightsquigarrow \{P(x), \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)), \neg R(x,u)\}$$

Этап 5: резолютивный вывод **противоречия** из $S_{\psi_{ssf}}$

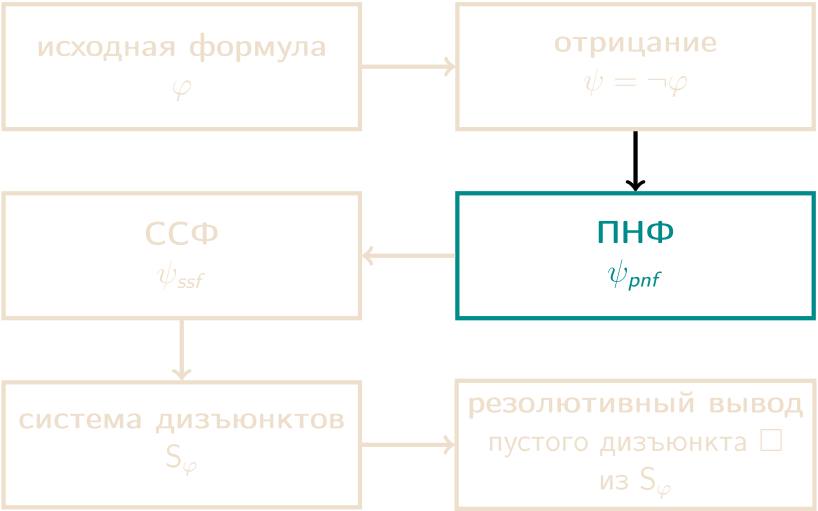
$\not\models S_{\psi_{ssf}} \Leftrightarrow$ из $S_{\psi_{ssf}}$ выводим противоречивый дизъюнкт $\square$

$$\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)) \quad P(x') \xrightarrow[\{x'/\mathbf{f}(x)\}]{} R(x,\mathbf{g}(x)) \quad \neg R(x',u') \xrightarrow[\{x'/x,\, u'/\mathbf{f}(x)\}]{} \square$$

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций



Предварённая нормальная форма

Замкнутая формула находится в
предварённой нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 \mathrm{x}_1 \;\dots\; Q_n \mathrm{x}_n}_{\text{кванторная приставка}} \; \underbrace{(\mathrm{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathrm{D}_k)}_{\text{матрица}} \;, \text{ где}$$

- $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- матрица — это бескванторная формула в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):
  - $\mathrm{D}_i = \mathrm{L}^i_1 \vee \dots \vee \mathrm{L}^i_{m_i}$ — множитель
  - L^i_j — литера: атом или его отрицание

Наряду с “находится в ПНФ” будем говорить “является ПНФ”

Предварённая нормальная форма

Пример: формула

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u\ (P(x)\ \&\ \neg R(x,u)\ \&(\neg P(y) \vee R(x,z)))$$

находится в **предварённой нормальной форме**:

- кванторная приставка: $\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall u$
- матрица: $P(x)\ \&\ \neg R(x,u)\ \&(\neg P(y) \vee R(x,z))$
  - множители: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y) \vee R(x,z)$
  - литеры: $P(x)$, $\neg R(x,u)$, $\neg P(y)$, $R(x,z)$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

Опишем общую схему приведения произвольной замкнутой формулы φ к ПНФ φ_{pnf} (с помощью равносильных преобразований и *теоремы о равносильной замене*) и проиллюстрируем эту схему на примере:

$$\varphi = \neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\; \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\; \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\; \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

1. *Переименование переменных*

Используя равносильности $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi \sim \substack{\forall \\ \exists}\mathrm{y}\ \varphi\,\{\mathrm{x}/y\}$, переименуем переменные, связанные кванторами, так, чтобы кванторами связывались попарно различные переменные

$$\neg\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{z}\ \mathrm{P}(\mathrm{z}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$
$$\sim$$
$$\neg\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{z}\ \mathrm{P}(\mathrm{z}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{u}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

2. *Удаление импликаций*

Используя равносильность $\psi \to \chi \sim \neg\psi \vee \chi$, удалим из формулы все импликации

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\sim$$

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

$$\sim$$

$$\neg\exists \mathrm{x}\,(\neg(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\neg\forall \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{z}) \vee \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \vee \exists \mathrm{u}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{u}))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

3. *Продвижение отрицаний*

Используя равносильности $\neg(\psi \overset{\&}{\vee} \chi) \sim \neg\psi \overset{\vee}{\&} \neg\chi$, $\neg \overset{\forall}{\exists} x\, \varphi \sim \overset{\exists}{\forall} x\, \neg\varphi$ и $\neg\neg\psi \sim \psi$, преобразуем формулу так, чтобы отрицания стояли только над атомами

$$\neg\exists x\, (\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\, P(z) \vee \exists y\, R(x,y))) \vee \exists u\, R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\, \neg(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\, P(z) \vee \exists y\, R(x,y)))\vee\exists u\, R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\, (\neg\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\, P(z) \vee \exists y\, R(x,y)))\,\&\,\neg\exists u\, R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\, (P(x)\,\&(\neg\forall z\, P(z) \vee \exists y\, R(x,y))\,\&\,\neg\exists u\, R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\, (P(x)\,\&(\exists z\, \neg P(z) \vee \exists y\, R(x,y))\,\&\,\forall u\, \neg R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

4. *Вынесение кванторов*

Используя равносильности $\overset{\forall}{\exists}x\ \varphi \overset{\&}{\vee} \psi \sim \overset{\forall}{\exists}x\ (\varphi \overset{\&}{\vee} \psi)$ и $\varphi \overset{\&}{\vee} \psi \sim \psi \overset{\&}{\vee} \varphi$, преобразуем формулу так, чтобы все кванторы расположились “снаружи” (были собраны в *кванторную приставку*)

$$\forall x\ (P(x)\,\&(\exists z\ \neg P(z) \vee \exists y\ R(x,y))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\ (P(x)\,\&\,\exists z\ (\neg P(z) \vee \exists y\ R(x,y))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\ (\exists z\ (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee \exists y\ R(x,y)))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$
$$\sim$$
$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Теорема о предварённой нормальной форме

Для любой замкнутой формулы существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Доказательство.

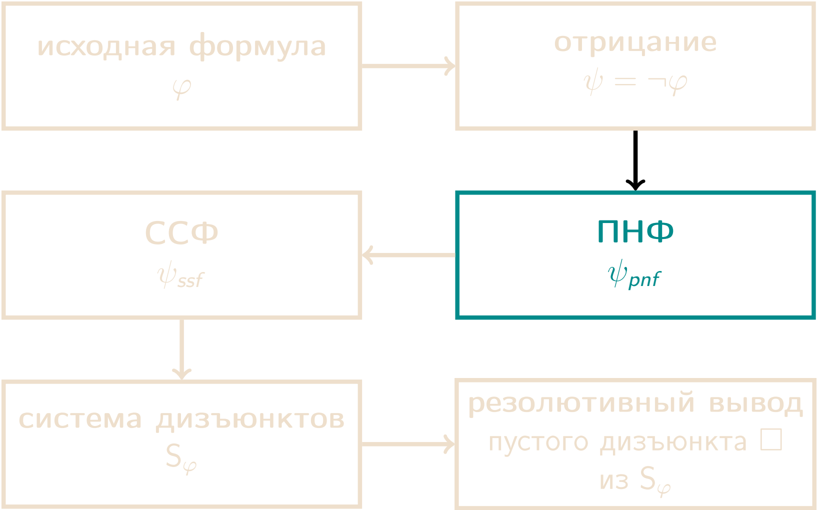
5. *Получение КНФ*

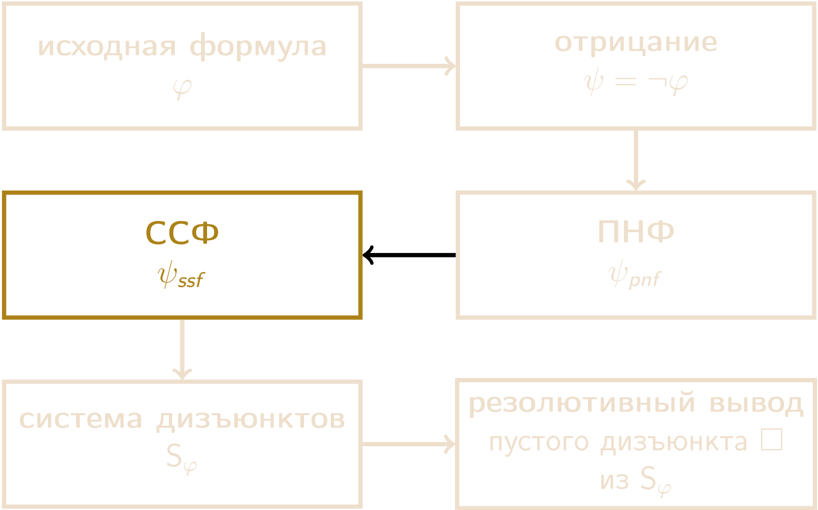
Используя законы булевой алгебры, преобразуем формулу так, чтобы бескванторная часть формулы представляла собой КНФ

$$\forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(z) \vee R(x, y)) \,\& \,\neg R(x, u))$$

В рассматриваемом примере никакие преобразования не нужны, а методы построения КНФ по произвольной (*булевой*) формуле изучались вами ранее в других курсах

Итог: после применения обозначенных равносильностей согласно обозначенной схеме **произвольная** замкнутая формула φ становится ПНФ ▼


исходная формула
φ
отрицание
$\psi = \neg\varphi$
ССФ
ψ_{ssf}
ПНФ
ψ_{pnf}
система дизъюнктов
S_φ
резолютивный вывод
пустого дизъюнкта $\Box$
из S_φ


исходная формула φ
отрицание $\psi = \neg\varphi$
ПНФ ψ_{pnf}
ССФ ψ_{ssf}
система дизъюнктов S_φ
резолютивный вывод пустого дизъюнкта $\square$ из S_φ

Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула находится в
сколемовской стандартной форме (ССФ), если

- она находится в предварённой нормальной форме и
- её кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$:

$$\forall \widetilde{x}^n \, (D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_k)$$

Например, формула

$$\forall x \, \forall u \, (P(x) \,\& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \,\& \, \neg R(x, u))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с “находится в ССФ” будем говорить “является ССФ”

Один из этапов метода резолюций —
сведение ПНФ к настолько же (не)выполнимой ССФ

Сколемовская стандартная форма

Лемма(*об удалении квантора существования*). **Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ $\mathbf{f}$ не содержится в χ. Тогда**

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\,\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство (леммы).

($\Leftarrow$): Пусть $\mathcal{I}$ — модель для формулы $\psi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\,\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models \chi\,\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}\,[\widetilde{d}^n]$$

Рассмотрим предмет $d_{n+1} = \bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n)$

Будет верно следующее: $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

Значит, $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi)[\widetilde{d}^n]$, и $\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$

Сколемовская стандартная форма

Лемма(*об удалении квантора существования*). **Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ $\mathbf{f}$ не содержится в χ. Тогда**

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}} / \mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство (леммы).

($\Rightarrow$): Пусть $\mathcal{I}$ — модель для φ

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ существует предмет d_{n+1}, такой что $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

По $\mathcal{I}$ построим **новую** интерпретацию $\mathcal{J}$:

если в сигнатуре был функциональный символ $\mathbf{f}$, удалим его
добавим в сигнатуру функциональный символ $\mathbf{f}^{(n)}$
оценим $\mathbf{f}$ так, чтобы выполнялось: $\bar{\mathbf{f}}(\widetilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}} / \mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}\, [\widetilde{d}^n]$,
а значит, $\mathcal{J} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}} / \mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$ ▼

Сколемовская стандартная форма

Лемма(*об удалении квантора существования*). **Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ — замкнутая формула ($n \geq 0$) и функциональный символ $\mathbf{f}$ не содержится в χ. Тогда**

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Небольшая вольность: если слева от $\exists$ не стоит ни одного $\forall$, то, согласно лемме, $\mathbf{f}$ — 0-местный функциональный символ, то есть **константа**, и ψ имеет вид $\chi\, \{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathbf{f}\}$

Сколемизация — это устранение кванторов $\exists$ с введением новых символов с целью получить более простую “хорошую” формулу (*здесь — сохраняющую выполнимость и невыполнимость*)

При устранении $\exists$ на место удаляемой переменной подставляются сколемовские термы (*здесь* — $\mathbf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$)

Сколемовская стандартная форма

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}

Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Как работает алгоритм:

$\varphi_{pnf} : \forall \mathtt{x}_1 \ \dots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \exists \mathtt{x}_k \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \dots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \exists \mathtt{x}_m \ \dots \ \chi$

$\forall \mathtt{x}_1 \ \dots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \dots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \exists \mathtt{x}_m \ \dots \ (\chi \{\mathtt{x}_k / \mathbf{f}(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{k-1})\})$

$$\forall \mathtt{x}_1 \ \dots \forall \mathtt{x}_{k-1} \ \forall \mathtt{x}_{k+1} \ \dots \forall \mathtt{x}_{m-1} \ \dots$$
$$(\chi \{\mathtt{x}_k / \mathbf{f}(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{k-1}), \mathtt{x}_m / \mathbf{g}(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{k-1}, \mathtt{x}_{k+1}, \dots, \mathtt{x}_{m-1})\})$$
$$\dots$$
$$Sk(\varphi_{pnf})$$

Требования к выбору функциональных символов:

формула χ не содержит вхождений символа $\mathbf{f}$

символы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ различны

формула χ не содержит вхождений символа $\mathbf{g}$, ...

Сколемовская стандартная форма

Пример

$$\varphi_{pnf}: \quad \forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(z) \vee R(x,y)) \,\&\, \neg R(x,u))$$

$$\forall x\, \exists y\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,y)) \,\&\, \neg R(x,u))$$

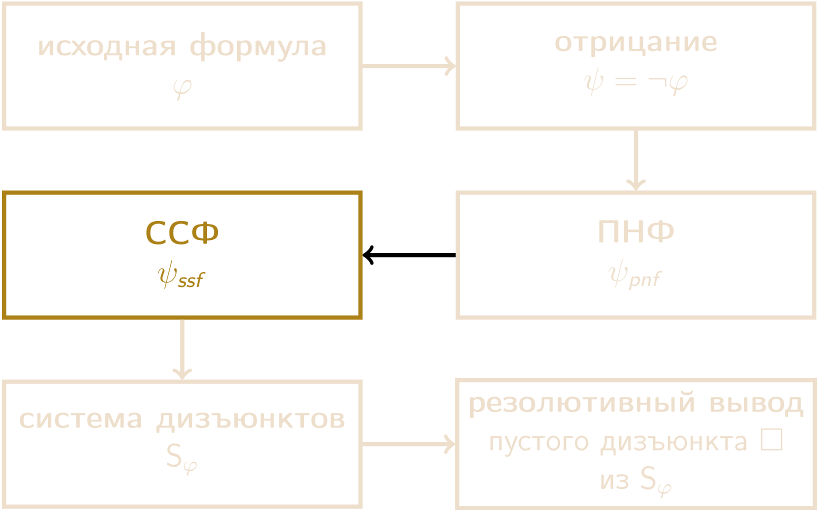
$$Sk(\varphi_{pnf}): \quad \forall x\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x))) \,\&\, \neg R(x,u))$$

Теорема(*о сколемизации*). Если φ_{pnf} — ПНФ, то $Sk(\varphi_{pnf})$ — ССФ, для которой верно следующее:

$$|\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad |\models Sk(\varphi_{pnf})$$

Доказательство. Достаточно **конечное** число раз применить *лемму об удалении квантора существования* ▼

А если в формулировке теоремы заменить "выполнима" ($|\models$) на "общезначима" ($\models$), останется ли она справедливой?


исходная формула
φ
отрицание
$\psi = \neg\varphi$
ПНФ
ψ_{pnf}
ССФ
ψ_{ssf}
система дизъюнктов
S_φ
резолютивный вывод
пустого дизъюнкта $\square$
из S_φ

исходная формула
φ

отрицание
$\psi = \neg\varphi$

ПНФ
ψ_{pnf}

ССФ
ψ_{ssf}

система дизъюнктов
S_φ

резолютивный вывод
пустого дизъюнкта $\Box$
из S_φ

Системы дизъюнктов

Дизъюнкт — это ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k)$$

Здесь L_i — это литера: атом или его отрицание

Для краткости кванторные приставки дизъюнктов будем опускать
(*вместо дизъюнкта записывать его единственный множитель*)

Небольшая вольность: чтобы упростить технические выкладки, будем считать, что дизъюнкт **не изменяется** при перестановке слагаемых; например, $\mathsf{L}_1 \vee \mathsf{L}_2$ и $\mathsf{L}_2 \vee \mathsf{L}_1$ — один и тот же дизъюнкт

Пустой дизъюнкт $\square$ — это дизъюнкт, не содержащий ни одной литеры

Пустой дизъюнкт считается **невыполнимым**:

$\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k \sim \mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k \vee \mathbf{false}$, а значит, $\square \sim \mathbf{false}$

Система дизъюнктов S выполнима ($|\models S$),
если она имеет хотя бы одну модель,
и невыполнима (противоречива; $|\not\models S$) иначе

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall \mathrm{x}\ (\varphi \,\&\, \psi) \sim \forall \mathrm{x}\ \varphi \,\&\, \forall \mathrm{x}\ \psi$

Доказательство. Очевидно

(достаточно применить *метод семантических таблиц*)

Теорема(*о переходе к дизъюнктам*)

$$|\!\models \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ (\mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathsf{D}_k) \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models \{\mathsf{D}_1, \dots, \mathsf{D}_k\}$$

Доказательство.

По утверждению выше: $\forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ (\mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathsf{D}_k) \sim \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ \mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ \mathsf{D}_k$

Значит, $|\!\models \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ (\mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathsf{D}_k)$

$\Leftrightarrow \quad |\!\models \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ \mathsf{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ \mathsf{D}_k$

$\Leftrightarrow \quad |\!\models \{\forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ \mathsf{D}_1, \dots, \forall \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}\ \mathsf{D}_2\}$ ▼

Системы дизъюнктов

Сводный итог:

$$\models \varphi?$$

φ общезначима
$\Leftrightarrow \quad \psi = \neg\varphi$ невыполнима
$\Leftrightarrow \quad$ (*равносильная*) φ_{pnf} невыполнима
$\Leftrightarrow \quad \varphi_{ssf} = Sk(\varphi_{ssf}) = \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}} \; (\mathrm{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{D}_k)$ невыполнима
$\Leftrightarrow \quad$ система $\mathrm{S}_\varphi = \{\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_k\}$ невыполнима

Проверка общезначимости формул *сведена* к проверке невыполнимости конечных систем дизъюнктов

Системы дизъюнктов

Пример

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))\ ?$$

Отрицание $\psi = \neg\varphi$*:*

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

Предварённая нормальная форма ψ_{pnf}*:*

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Сколемовская стандартная форма ψ_{ssf}*:*

$$\forall x\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Система дизъюнктов S_φ*:*

$$\left\{ \begin{array}{c} P(x) \\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)) \\ \neg R(x,u) \end{array} \right\}$$

Следующий шаг метода резолюций —
проверка (не)выполнимости конечной системы дизъюнктов

Противоречия в системах дизъюнктов

- $\{P(x),\ \neg P(x)\}$

$$\begin{array}{ccc} P(x) & & \neg P(x) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \square & \end{array}$$

явное противоречие

- $\{\neg P(x),\ \neg Q(y),\ P(x) \vee Q(y)\}$

$$\begin{array}{ccc} \neg P(x) & P(x) \vee Q(y) & \neg Q(y) \\ & \downarrow & \\ & Q(y) & \\ & \downarrow & \\ & \square & \end{array}$$

явное противоречие

$\forall x\ \neg P(x),\ \forall x\ \forall y\ (P(x) \vee Q(y)) \models \forall y\ Q(y)$

Противоречия в системах дизъюнктов

- $\{P(\mathbf{f}(x), y),\ \neg P(u, \mathbf{g}(v))\}$

неявное противоречие

$$\begin{tikzcd}
P(\mathbf{f}(x), y) \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & \neg P(u, \mathbf{g}(v)) \arrow[d, dotted] \arrow[dl] \\
P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v)) \arrow[r, dotted] & \square & \neg P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v)) \arrow[l, dotted]
\end{tikzcd}$$

$\forall x\, \forall y\, P(\mathbf{f}(x), y) \models \forall x\, \forall v\, P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$

$\forall u\, \forall v\, \neg P(u, \mathbf{g}(v)) \models \forall x\, \forall v\, \neg P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$

Чтобы обнаружить неявное противоречие, потребовалось выделить из атомов общий частный случай — привести их к общему виду

Приведение выражений к общему виду называется унификацией, и перед описанием последнего этапа метода резолюций (**резолютивного вывода** $\square$) необходимо строго сформулировать и научиться решать эту задачу

Задача унификации

Унификация атомов A, B достигается применением к ним *подстановки* θ, такой что $A\theta = B\theta$

Напоминание

Подстановка — это отображение $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Term}$

Конечная подстановка задаётся множеством *связок*:

$$\{\mathtt{x}_1/t_1,\ \ldots,\ \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$$

$E\theta$ — это результат применения подстановки θ к выражению E

Чтобы поставить и решить задачу унификации, исследуем алгебраические свойства подстановок

Задача унификации

Композиция подстановок θ, η — это подстановка $\theta\eta$, такая что для любой переменной $\mathtt{x}$ верно:

$$\mathtt{x}(\theta\eta) = (\mathtt{x}\theta)\eta$$

Утверждение. Пусть $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_n/t_n\}$ и $\eta = \{\mathtt{y}_1/s_1, \ldots, \mathtt{y}_k/s_k\}$. Тогда

$$\theta\eta = \{\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i\eta \mid 1 \le i \le n,\ x_i \ne t_i\eta\} \\ \cup \{\mathtt{y}_\mathtt{j}/s_j \mid 1 \le j \le k,\ \mathtt{y}_\mathtt{j} \notin \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n\}\}$$

Доказательство. Рассмотрим переменную $\mathtt{z} \in \mathsf{Var}$

Если $\mathtt{z} \notin \mathsf{Dom}_\theta \cup \mathsf{Dom}_\eta$, то $\mathtt{z}(\theta\eta) = (\mathtt{z}\theta)\eta = \mathtt{z}\eta = \mathtt{z}$

Если $\mathtt{z} = \mathtt{y}_\mathtt{j} \in \mathsf{Dom}_\eta \setminus \mathsf{Dom}_\theta$, то $\mathtt{z}(\theta\eta) = (\mathtt{z}\theta)\eta = \mathtt{z}\eta = s_j$

Иначе $\mathtt{z} = \mathtt{x}_\mathtt{i} \in \mathsf{Dom}_\theta$, и $\mathtt{z}(\theta\eta) = (\mathtt{z}\theta)\eta = t_i\eta$ ▼

Задача унификации

Пример

$\theta = \{x/\mathbf{f}(x, \mathbf{c}),\ y/\mathbf{g}(u),\ z/y\}$

$\eta = \{x/\mathbf{g}(y), y/z, u/\mathbf{c}\}$

$\theta\eta = ?$

$$\{x/\mathbf{f}(x, \mathbf{c})\eta,\ y/\mathbf{g}(u)\eta,\ z/y\eta\} \cup \{u/\mathbf{c}\}$$

$$\{x/\mathbf{f}(\mathbf{g}(y), \mathbf{c}),\ y/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ z/z\} \cup \{u/\mathbf{c}\}$$

$$\{x/\mathbf{f}(\mathbf{g}(y), \mathbf{c}),\ y/\mathbf{g}(\mathbf{c})\} \cup \{u/\mathbf{c}\}$$

$$\theta\eta = \{x/\mathbf{f}(\mathbf{g}(y), \mathbf{c}),\ y/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ u/\mathbf{c}\}$$

Задача унификации

Подстановка θ называется унификатором выражений E_1, E_2, если $E_1\theta = E_2\theta$

$\text{У}(E_1, E_2)$ — множество всех унификаторов выражений E_1, E_2

Выражения E_1, E_2 унифицируемы, если $\text{У}(E_1, E_2) \neq \emptyset$

Подстановка η — специализация подстановки θ, если существует подстановка μ, такая что $\eta = \theta\mu$

Подмножество S множества подстановок Θ — полное в Θ, если любая подстановка из Θ является специализацией хотя бы одной подстановки из S

Подстановка θ — наиболее общая в множестве подстановок Θ, если $\theta \in \Theta$ и $\{\theta\}$ — множество, полное в Θ

$\text{НОУ}(E_1, E_2)$ — множество всех наиболее общих унификаторов выражений E_1, E_2

Задача унификации

Примеры

Подстановка $\eta = \{y/\mathbf{g}(\mathbf{g}(v)), u/\mathbf{f}(\mathbf{c}), v/\mathbf{g}(v), x/\mathbf{c}\}$ — унификатор атомов $P(\mathbf{f}(x), y)$, $P(u, \mathbf{g}(v))$:

$$P(\mathbf{f}(x), y)\eta = P(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{g}(\mathbf{g}(v))) = P(u, \mathbf{g}(v))\eta$$

А подстановка $\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\}$ — *более общий* их унификатор:

$$P(\mathbf{f}(x), y)\theta = P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v)) = P(u, \mathbf{g}(v))\theta$$

$$\eta = \theta\,\{v/\mathbf{g}(v), x/\mathbf{c}\}$$

Оказывается, что θ —

наиболее общий унификатор атомов $P(\mathbf{f}(x), y)$, $P(u, \mathbf{g}(v))$

(но как это доказать?)

А выражения $P(x, \mathbf{f}(x))$, $P(\mathbf{g}(y), y)$ **неунифицируемы**

(а это как доказать?)

Задача унификации

формулируется следующим образом:

для заданных выражений E_1, E_2

выяснить, унифицируемы ли эти выражения,

и если это так, то вычислить

множество унификаторов, полное в $\mathbf{У}(E_1, E_2)$