# Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

## Лекция 7

Задача унификации

Алгоритм унификации атомарных формул

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

# Напоминание

На последнем этапе *метода резолюций*

- рассматриваются системы *дизъюнктов*: формул, представляющих собой *литеры* (атомы или их отрицания), соединённые дизъюнкцией
- из *противоречивых* систем дизъюнктов в качестве “частного случая” (*логического следствия*) извлекается *пустой дизъюнкт* $\square$: невыполнимый дизъюнкт, не содержащий ни одной литеры и обозначающий явное противоречие
- при извлечении $\square$ возникает необходимость в *унификации* атомарных формул: приведении их к “общему частному случаю” заменой переменных на произвольные термы

неявное противоречие

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & \neg\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v})) \arrow[d, dotted] \arrow[dl] \\
\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathbf{g}(\mathrm{v})) \arrow[r, dotted] & \square & \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathbf{g}(\mathrm{v})) \arrow[l, dotted]
\end{tikzcd}$$

# Задача унификации

Унификация атомов $A$, $B$ достигается применением к ним *подстановки* $\theta$, такой что $A\theta = B\theta$

**Напоминание**

*Подстановка* — это отображение $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Term}$

Конечная подстановка задаётся множеством *связок*:

$$\{\mathtt{x}_1/t_1,\ \ldots,\ \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$$

*$E\theta$* — это результат применения подстановки $\theta$ к выражению $E$

Чтобы поставить и решить задачу унификации, исследуем алгебраические свойства подстановок

# Задача унификации

Композиция подстановок $\theta$, $\eta$ — это подстановка $\theta\eta$, такая что для любой переменной $\mathtt{x}$ верно:

$$\mathtt{x}(\theta\eta) = (\mathtt{x}\theta)\eta$$

**Утверждение. Пусть $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_n/t_n\}$ и $\eta = \{\mathtt{y}_1/s_1, \ldots, \mathtt{y}_k/s_k\}$. Тогда**

$$\theta\eta = \{\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i\eta \mid 1 \le i \le n,\ x_i \ne t_i\eta\} \\ \cup \{\mathtt{y}_\mathtt{j}/s_j \mid 1 \le j \le k,\ \mathtt{y}_\mathtt{j} \notin \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n\}\}$$

Доказательство. Рассмотрим переменную $\mathsf{z} \in \mathsf{Var}$

Если $\mathsf{z} \notin \mathsf{Dom}_\theta \cup \mathsf{Dom}_\eta$, то $\mathsf{z}(\theta\eta) = (\mathsf{z}\theta)\eta = \mathsf{z}\eta = \mathsf{z}$

Если $\mathsf{z} = \mathtt{y}_\mathtt{j} \in \mathsf{Dom}_\eta \setminus \mathsf{Dom}_\theta$, то $\mathsf{z}(\theta\eta) = (\mathsf{z}\theta)\eta = \mathsf{z}\eta = s_j$

Иначе $\mathsf{z} = \mathtt{x}_\mathtt{i} \in \mathsf{Dom}_\theta$, и $\mathsf{z}(\theta\eta) = (\mathsf{z}\theta)\eta = t_i\eta$ ▼

# Задача унификации

## Пример

$\theta = \{x/\mathbf{f}(x, \mathbf{c}),\ y/\mathbf{g}(u),\ z/y\}$

$\eta = \{x/\mathbf{g}(y), y/z, u/\mathbf{c}\}$

$\theta\eta = ?$

$$\{x/\mathbf{f}(x, \mathbf{c})\eta,\ y/\mathbf{g}(u)\eta,\ z/y\eta\} \cup \{u/\mathbf{c}\}$$

$$\{x/\mathbf{f}(\mathbf{g}(y), \mathbf{c}),\ y/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ z/z\} \cup \{u/\mathbf{c}\}$$

$$\{x/\mathbf{f}(\mathbf{g}(y), \mathbf{c}),\ y/\mathbf{g}(\mathbf{c})\} \cup \{u/\mathbf{c}\}$$

$$\theta\eta = \{x/\mathbf{f}(\mathbf{g}(y), \mathbf{c}),\ y/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ u/\mathbf{c}\}$$

# Задача унификации

Подстановка $\theta$ называется унификатором выражений $E_1$, $E_2$, если $E_1\theta = E_2\theta$

$У(E_1, E_2)$ — множество всех унификаторов выражений $E_1$, $E_2$

Выражения $E_1$, $E_2$ унифицируемы, если $У(E_1, E_2) \neq \emptyset$

Подстановка $\eta$ — специализация подстановки $\theta$, если существует подстановка $\mu$, такая что $\eta = \theta\mu$

Подмножество $S$ множества подстановок $\Theta$ — полное в $\Theta$, если любая подстановка из $\Theta$ является специализацией хотя бы одной подстановки из $S$

Подстановка $\theta$ — наиболее общая в множестве подстановок $\Theta$, если $\theta \in \Theta$ и $\{\theta\}$ — множество, полное в $\Theta$

$НОУ(E_1, E_2)$ — множество всех наиболее общих унификаторов выражений $E_1$, $E_2$

# Задача унификации

## Примеры

Подстановка $\eta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathrm{v})), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{v}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{x}/\mathbf{c}\}$ — унификатор атомов $\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})$, $\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))$:

$$\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})\eta = \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathrm{v}))) = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))\eta$$

А подстановка $\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\}$ — *более общий* их унификатор:

$$\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})\theta = \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathbf{g}(\mathrm{v})) = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))\theta$$

$$\eta = \theta\,\{\mathrm{v}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{x}/\mathbf{c}\}$$

Оказывается, что $\theta$ —
**наиболее общий унификатор** атомов $\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})$, $\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))$
(но как это доказать?)

А выражения $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{x}))$, $\mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{y})$ **неунифицируемы**
(а это как доказать?)

# Задача унификации

формулируется следующим образом:

**для заданных выражений $E_1$, $E_2$**

**выяснить, унифицируемы ли эти выражения,**

**и если это так, то вычислить**

**множество унификаторов, полное в $\textbf{У}(E_1, E_2)$**

# Алгоритм унификации атомарных формул

*Унификация, простой случай:* $У(\mathrm{x}, t) =?$ $(\mathrm{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

**Лемма(*о связке*).** **Пусть** $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$ **и** $t \in \mathsf{Term}$. **Тогда:**

1. **если** $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$, **то** $\{\mathrm{x}/t\} \in \textbf{НОУ}(\mathrm{x}, t)$
2. **если** $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathrm{x} \neq t$, **то** $\textbf{У}(\mathrm{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.

*1.* $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$

Достаточно показать, что:

а) $\{\mathrm{x}/t\}$ — унификатор (*переменной* $\mathrm{x}$ *и терма* $t$)

б) для любого унификатора $\theta$ существует унификатор $\eta$, такой что $\theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\eta$

*а)* $\mathrm{x}\,\{\mathrm{x}/t\} = t = t\,\{\mathrm{x}/t\}$

# Алгоритм унификации атомарных формул

*Унификация, простой случай:* $\text{У}(\mathrm{x}, t) =?$ $(\mathrm{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

**Лемма(*о связке*). Пусть** $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$ **и** $t \in \mathsf{Term}$**. Тогда:**

1. **если** $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$**, то** $\{\mathrm{x}/t\} \in \textbf{НОУ}(\mathrm{x}, t)$
2. **если** $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathrm{x} \neq t$**, то** $\textbf{У}(\mathrm{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.

*1б)* $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$; $\quad \mathrm{x}\theta = t\theta \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \exists\eta \quad \theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\eta$

Рассмотрим произвольную переменную $\mathrm{y}$

Если $\mathrm{y} = \mathrm{x}$, то $\mathrm{y}\theta = \mathrm{x}\theta = t\theta = \mathrm{x}\,\{\mathrm{x}/t\}\theta = \mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\,\theta$

Если $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$, то $\mathrm{y}\theta = \mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\theta$

*Итог:* для любой переменной $\mathrm{y}$ верно равенство $\mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\,\theta = \mathrm{y}\theta$,
а значит, $\theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\theta$

# Алгоритм унификации атомарных формул

*Унификация, простой случай:* $\text{У}(\mathrm{x}, t) = ?$ $\qquad (\mathrm{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

**Лемма(*о связке*). Пусть $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$ и $t \in \mathsf{Term}$. Тогда:**

1. **если $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$, то $\{\mathrm{x}/t\} \in \textbf{НОУ}(\mathrm{x}, t)$**
2. **если $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathrm{x} \neq t$, то $\textbf{У}(\mathrm{x}, t) = \emptyset$**

Доказательство.

*2.* $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$, $\mathrm{x} \neq t$

Рассмотрим произвольную подстановку $\theta$

Пусть $\mathrm{x}\theta = s$

Тогда $|\mathrm{x}\theta| = |s| < |t\{\mathrm{x}/s\}| \leq |t\theta|$ $\qquad$ ($|p|$— *длина терма* $p$)

$|\mathrm{x}\theta| < |t\theta|$, а значит, $\mathrm{x}\theta \neq t\theta$ ▼

# Алгоритм унификации атомарных формул

*Унификация атомов*

$$E_1 = \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k),\ E_2 = \mathrm{P}(s_1, \dots, s_k)$$

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление подстановки $\theta$, такой что левая $(t_i)$ и правая $(s_i)$ части каждого уравнения в системе

$$\mathcal{E}(E_1, E_2) = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

становятся посимвольно одинаковыми при применении $\theta$ ко всем термам системы

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление **решения системы уравнений** $\mathcal{E}(E_1, E_2)$ в свободной[1] алгебре термов[2]

---

[1] Значение терма — это сам терм, то есть термы равны, если они посимвольно совпадают

[2] **Операция** композиции — это подстановка терма на место переменной

# Алгоритм унификации атомарных формул

Для устранения неоднозначности нотации будем до конца лекции использовать такие обозначения: $(t, s \in \text{Term})$

- $t{=}s$ — уравнение с левой частью $t$ и правой частью $s$
- $t{\equiv}s$ — “термы $t$ и $s$ посимвольно совпадают”

Подстановка $\theta$ — унификатор (*решение*) системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases},$$

если $t_i\theta \equiv s_i\theta$ для каждого $i$, $1 \le i \le k$

$У(\mathcal{E})$ — множество всех унификаторов системы уравнений $\mathcal{E}$

Система уравнений $\mathcal{E}$ унифицируема (*имеет решение*), если $У(\mathcal{E}) \neq \emptyset$

$НОУ(\mathcal{E})$ — множество всех наиболее общих унификаторов системы уравнений $\mathcal{E}$

# Алгоритм унификации атомарных формул

## Пример

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{z} \end{cases} \qquad \mathcal{E}\theta = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$

$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathbf{c}, \mathrm{z}/\mathbf{g}(\mathbf{c})\}$ — унификатор системы $\mathcal{E}$
(*более того, наиболее общий*)

А система $\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{y}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{z} \end{cases}$ неунифицируема

# Алгоритм унификации атомарных формул

**Утверждение**

**Множества унификаторов любой пары атомов**

$$E_1 = \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k),\ E_2 = \mathrm{P}(s_1, \dots, s_k)$$

**и соответствующей системы уравнений**

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(E_1, E_2) = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

**совпадают**

Доказательство. Очевидно (следует из определений унификатора)

**Утверждение**

**Никакая пара атомов $\mathrm{P}(t_1, \dots, t_k)$, $\mathrm{Q}(s_1, \dots, s_m)$, такая что символы $\mathrm{P}$ и $\mathrm{Q}$ различны, не унифицируема**

Доказательство. Очевидно?

# Алгоритм унификации атомарных формул

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

**Пример**

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathrm{z} = \mathrm{w} \\ \mathrm{u} = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$ — **приведённая** система

# Алгоритм унификации атомарных формул

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

**Пример**

$$\begin{cases} \mathtt{x} = \mathbf{f}(\mathtt{y}, \mathbf{g}(\mathtt{y})) \\ \mathtt{x} = \mathtt{w} \\ \mathtt{y} = \mathbf{g}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathtt{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathtt{x}) \end{cases}$$

— **неприведённая** система:

1. $\mathbf{g}(\mathtt{z})$ — не переменная, стоит в левой части уравнения
2. $\mathtt{x}$ встречается в левых частях два раза
3. $\mathtt{y}$ встречается и в левой, и в правой частях

# Алгоритм унификации атомарных формул

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathrm{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathrm{Var}_{t_k} = \emptyset$$

*Унификация, более сложный случай:* У$(\mathcal{E}) =$?

($\mathcal{E}$ — приведённая система уравнений)

**Лемма(*о приведённой системе*). Если** $\mathcal{E} = \begin{cases} \mathrm{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathrm{x}_k = t_k \end{cases}$ **— приведённая система, то** $\{\mathrm{x}_1/t_1, \dots, \mathrm{x}_k/t_k\} \in$ **НОУ**$(\mathcal{E})$

Доказательство. Следует из *леммы о связке* ▼

# Алгоритм унификации атомарных формул

*Унификация, общий случай:* $У(\mathcal{E}) = ?$

($\mathcal{E}$ — произвольная система уравнений)

Системы уравнений $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ равносильны, если $У(\mathcal{E}_1) = У(\mathcal{E}_2)$

Будем преобразовывать систему $\mathcal{E}$
**методом исключения переменных** так, чтобы в результате получилась равносильная система одного из двух видов:

- приведённая
- *очевидно* неунифицируемая

# Алгоритм унификации атомарных формул

## Алгоритм унификации[1]

Далее будут описаны 6 правил преобразования системы уравнений

Эти правила произвольно (недетерминированно) применяются к системе, пока не станет верным одно из условий:

- получена приведённая система уравнений
  - ответ: унификатор из *леммы о приведённой системе*
- **явно** установлена невозможность унификации системы
  - ответ: СТОП: система неунифицируема

[1] Martelli A., Montanari U. An efficient unification algorithm. 1982

# Алгоритм унификации атомарных формул

## Правила преобразования системы уравнений

*Упрощение системы:* $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Triv: удалить $t = t$

Swap: заменить $t = \mathtt{x}$ на $\mathtt{x} = t$, если $t \notin \mathsf{Var}$

Func: заменить $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{f}(s_1, \ldots, s_k)$ на $\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \ldots \\ t_k = s_k \end{cases}$

Red: если в системе содержится уравнение $Eq : \mathtt{x} = t$, где

- $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$
- $\mathtt{x}$ встречается в других уравнениях системы

то применить подстановку $\{\mathtt{x}/t\}$ ко всем уравнениям системы, кроме $Eq$

# Алгоритм унификации атомарных формул

## Правила преобразования системы уравнений

*Явная неунифицируемость:* $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

NRed: если в системе содержится уравнение $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathtt{x} \not\equiv t$, то
СТОП: система неунифицируема

NFunc: если в системе содержится уравнение $\mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) = \mathbf{g}(s_1, \dots, s_m)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$, то
СТОП: система неунифицируема

# Алгоритм унификации атомарных формул

## Примеры

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(y)) &=& \mathbf{f}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} &=& y \end{array}\right. \xmapsto{\text{Func}} \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(y) &=& x \\ \mathbf{c} &=& y \end{array}\right.$$

$$\xmapsto{\text{Swap}} \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(y) &=& x \\ y &=& \mathbf{c} \end{array}\right. \xmapsto{\text{Red} \times 2} \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) &=& \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ y &=& \mathbf{c} \end{array}\right.$$

$$\xmapsto{\text{Triv}} \left\{ \begin{array}{l} x = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ y = \mathbf{c} \end{array}\right. \dashleftarrow \text{приведённая система}$$

*Ответ:* $\{x/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ y/\mathbf{c}\} \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$

# Алгоритм унификации атомарных формул

## Примеры

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(y)) & = & \mathbf{h}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} & = & y \end{array} \right.$$

$$\Big\downarrow \text{NFunc}$$

СТОП

*Ответ:* У$(\mathcal{E}) = \emptyset$

# Алгоритм унификации атомарных формул

## Примеры

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{rl} \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) & = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{x}) \\ \mathbf{c} & = \mathrm{y} \end{array} \right. \arrow[r, mapsto, "\mathsf{Func}"] & \left\{ \begin{array}{rl} \mathrm{x} & = \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathbf{g}(\mathrm{x}) & = \mathrm{x} \\ \mathbf{c} & = \mathrm{y} \end{array} \right. \arrow[d, mapsto, "\mathsf{Swap}"'] \\
\text{СТОП} & \left\{ \begin{array}{rl} \mathrm{x} & = \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathrm{x} & = \mathbf{g}(\mathrm{x}) \\ \mathbf{c} & = \mathrm{y} \end{array} \right. \arrow[l, mapsto, "\mathsf{NRed}"']
\end{tikzcd}
$$

*Ответ:* $\text{У}(\mathcal{E}) = \emptyset$

# Алгоритм унификации атомарных формул

**Теорема**(*об унификации*)
Для любой системы уравнений $\mathcal{E}$

- алгоритм унификации завершает работу на $\mathcal{E}$ (завершаемость)
- по завершении работы алгоритмом выдаётся подстановка или сообщение СТОП (успешность)
- если выдана подстановка $\theta$, то $\theta \in$ НОУ$(\mathcal{E})$ (корректность)
- если выдано сообщение СТОП, то система $\mathcal{E}$ неунифицируема (полнота)

**Следствие**
Атомы $E_1 = \mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)$ и $E_2 = \mathrm{Q}(s_1, \dots, s_k)$ унифицируемы $\Leftrightarrow$ НОУ$(E_1, E_2) \neq \emptyset$

# Доказательство теоремы об унификации

## Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrowtail \infty$)

Далее будет строго сформулированы и обоснованы следующие факты:

- на каждом шаге работы алгоритма унификации система становится немного проще
- самая простая система обязательно будет получена после конечного числа шагов

Придумаем характеристику системы, которая
убывает на каждом шаге и при этом
не может убывать бесконечно долго

# Доказательство теоремы об унификации

## Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrowtail \infty$)

Переменная $\mathtt{x}$ — приведённая в $\mathcal{E}$, если $\mathcal{E}$ содержит уравнение вида $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$, и не содержит $\mathtt{x}$ в других уравнениях

Характеристика системы $\mathcal{E}$ — упорядоченная тройка чисел $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$, где

- $vr(\mathcal{E})$ — число **неприведённых** переменных системы $\mathcal{E}$
- $fs(\mathcal{E})$ — суммарное число функциональных символов и констант в **левых частях** уравнений $\mathcal{E}$
- $eq(\mathcal{E})$ — число уравнений системы $\mathcal{E}$

# Доказательство теоремы об унификации

## Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

Лексикографический порядок на тройках целых чисел определяется так:

$$\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \succ \langle m_1, m_2, m_3 \rangle \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} n_1 > m_1 \\ n_1 = m_1,\ n_2 > m_2 \\ n_1 = m_1,\ n_2 = m_2,\ n_3 > m_3 \end{array} \right.$$

**Пример:**

$$\langle 2, 11, 2 \rangle \succ \langle 2, 10, 5578 \rangle \succ \langle 2, 10, 5577 \rangle \succ \langle 1, 1001, 78 \rangle$$

# Доказательство теоремы об унификации

## Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrowtail \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

*Факт 1:* при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

*Правило Triv:*

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ t = t \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) \geq fs(\mathcal{E}') \qquad eq(\mathcal{E}) > eq(\mathcal{E}')$$

# Доказательство теоремы об унификации

## Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrowtail \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

*Факт 1:* при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

*Правило Swap:*

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ t = \mathrm{x} \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) > fs(\mathcal{E}')$$

# Доказательство теоремы об унификации

## Завершаемость ($\mathcal{E} \not\mapsto \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

*Факт 1:* при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

*Правило Func:*

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) = \mathbf{f}(s_1, \dots, s_k) \\ \dots \end{array} \right. \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \quad t_1 = s_1 \\ \quad \dots \\ \quad t_k = s_k \\ \dots \end{array} \right.$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) > fs(\mathcal{E}')$$

# Доказательство теоремы об унификации

## Завершаемость ($\mathcal{E} \not\mapsto \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

*Факт 1:* при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

*Правило Red:*

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) > vr(\mathcal{E}')$$

# Доказательство теоремы об унификации

## Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightsquigarrow \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

*Факт 2:* характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

# Доказательство теоремы об унификации

*Факт 2:* характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

Начнём с наглядной иллюстрации этого факта

Представьте, что у Вас есть 10 килограммов конфет: вкусных, обычных и невкусных — и Вы пришли в пункт обмена конфет, в котором можно

- отдать вкусную конфету
  и взамен получить сколько угодно обычных и невкусных
- отдать обычную конфету
  и взамен получить сколько угодно невкусных
- отдать невкусную конфету (*всё равно Вам она не нужна*)

Если слишком увлечётесь обменом,
Вы обязательно останетесь без конфет

# Доказательство теоремы об унификации

## Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrowtail \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

*Факт 2:* характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

**Лемма. Не существует бесконечной последовательности троек неотрицательных целых чисел, убывающей относительно лексикографического порядка**

Доказательство (леммы). Попробуйте сами

Эта лемма означает, что $(\mathbb{N}_0^3, \succ)$ — фундированное множество, или, по-другому, упорядоченное множество, обладающее свойством обрыва убывающих цепей

# Доказательство теоремы об унификации

## Успешность ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta$/СТОП)

**Не**успешность алгоритма означает, что на некотором шаге работы получена **неприведённая** система $\mathcal{E}'$, к котороой **невозможно применить** ни одно из правил Triv, Swap, Func, Red, NFunc, NRed

*Невозможно применить правила Triv, Swap, Func, NFunc* $\Rightarrow$
в левых частях $\mathcal{E}'$ содержатся **только** переменные

*Невозможно применить правила Red, NRed* $\Rightarrow$
все переменные в левых частях $\mathcal{E}'$ являются приведёнными

*Итог:* если к $\mathcal{E}'$ невозможно применить ни одно из правил Triv, Swap, Func, Red, NFunc, NRed, то она обязательно является приведённой, и в качестве ответа выдаётся подстановка

# Доказательство теоремы об унификации

**Корректность** ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in$ НОУ$(\mathcal{E})$)

Достаточно показать, что при применении правил упрощения (Triv, Swap, Func, Red) получается система, **равносильная** исходной

Для правил Triv, Swap, Func это показать довольно просто

Подробно рассмотрим только правило Red:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \ldots \\ \mathrm{x} = t \\ \ldots \end{cases} \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \ldots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \ldots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

Покажем, что системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ **равносильны**:

$$\text{У}(\mathcal{E}) = \text{У}(\mathcal{E}')$$

# Доказательство теоремы об унификации

**Корректность** ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in$ НОУ$(\mathcal{E})$)

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathtt{x} = t \\ \dots \end{cases} \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathtt{x}/t\} \\ \mathtt{x} = t \\ \dots\{\mathtt{x}/t\} \end{cases}$$

$$\text{У}(\mathcal{E}) \stackrel{?}{=} \text{У}(\mathcal{E}')$$

($\subseteq$): Пусть $\eta$ — унификатор системы $\mathcal{E}$

Тогда $\mathtt{x}\eta \equiv t\eta$

*Из доказательства леммы о связке:* $\eta = \{\mathtt{x}/t\}\,\eta$, а значит,

$$\begin{cases} \dots\eta \\ \mathtt{x}\eta \equiv t\eta \\ \dots\eta \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dots\{\mathtt{x}/t\}\,\eta \\ \mathtt{x}\eta \equiv t\eta \\ \dots\{\mathtt{x}/t\}\,\eta \end{cases}$$

Следовательно, $\eta$ — унификатор системы $\mathcal{E}'$

($\supseteq$): Рассуждения аналогичны

# Доказательство теоремы об унификации

**Полнота** ($\mathcal{E} \rightsquigarrow$ СТОП $\Rightarrow$ У$(\mathcal{E}) = \emptyset$)

Для определённости считаем, что сообщение СТОП выдано для системы $\mathcal{E}'$

*Пусть для этого было применено правило NFunc*

Тогда $\mathcal{E}'$ содержит уравнение $\mathbf{f}(\dots) = \mathbf{g}(\dots)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$

Ни для какой подстановки $\theta$ не верно $\mathbf{f}(\dots)\theta \equiv \mathbf{g}(\dots)\theta$

*Пусть для этого было применено правило NRed*

Тогда $\mathcal{E}'$ содержит уравнение $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}_t$ и $\mathtt{x} \not\equiv t$

*Лемма о связке:* ни для какой подстановки $\theta$ не верно $\mathtt{x}\theta \equiv t\theta$

*Итог:* система $\mathcal{E}'$ неунифицируема

Система $\mathcal{E}'$ была получена из $\mathcal{E}$ применением правил Triv, Swap, Func, Red

*Корректность алгоритма:* системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ равносильны

Значит, система $\mathcal{E}$ неунифицируема ▼