Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2018, весенний семестр

Лекция 7

Алгоритм унификации

Напоминание

Задача унификации формулируется следующим образом:

для заданных выражений E_1, E_2

выяснить, унифицируемы ли эти выражения,

и если это так, то

вычислить их наиболее общий унификатор

Алгоритм унификации

Унификация, простой случай: НОУ$(\mathtt{x}, t) =?$ $\quad(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Лемма о связке

Пусть $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$ **и** $t \in \mathsf{Term}$. **Тогда:**

1. **если** $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$, **то** $\{\mathtt{x}/t\} \in$ **НОУ**$(\mathtt{x}, t)$
2. **если** $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathtt{x} \neq t$, **то НОУ**$(\mathtt{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.
1. $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$

Достаточно показать, что:

а) $\{\mathtt{x}/t\}$ — унификатор (*переменной* $\mathtt{x}$ *и терма* t)

б) для любого унификатора θ существует унификатор η, такой что $\theta = \{\mathtt{x}/t\}\,\eta$

а) $\mathtt{x}\,\{\mathtt{x}/t\} = t = t\,\{\mathtt{x}/t\}$

Алгоритм унификации

Унификация, простой случай: НОУ$(\mathrm{x}, t) =?$ $(\mathrm{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Лемма о связке

Пусть $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$ **и** $t \in \mathsf{Term}$. **Тогда:**

1. **если** $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$, **то** $\{\mathrm{x}/t\} \in$ **НОУ**(x, t)
2. **если** $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathrm{x} \neq t$, **то НОУ**$(\mathrm{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.

1б) $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$; $\quad \mathrm{x}\theta = t\theta \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \exists\eta \quad \theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\eta$

Рассмотрим произвольную переменную y

Если $\mathrm{y} = \mathrm{x}$, то $\mathrm{y}\theta = \mathrm{x}\theta = t\theta = \mathrm{x}\,\{\mathrm{x}/t\}\theta = \mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\,\theta$
Если $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$, то $\mathrm{y}\theta = \mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\theta$

Итог: для любой переменной y верно равенство $\mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\,\theta = \mathrm{y}\theta$,
а значит, $\theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\theta$

Алгоритм унификации

Унификация, простой случай: НОУ$(\mathtt{x}, t) =?$ $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Лемма о связке

Пусть $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$ **и** $t \in \mathsf{Term}$. **Тогда:**

1. **если** $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$, **то** $\{\mathtt{x}/t\} \in$ **НОУ**$(\mathtt{x}, t)$
2. **если** $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathtt{x} \neq t$, **то НОУ**$(\mathtt{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.
2. $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$, $\mathtt{x} \neq t$

Рассмотрим произвольную подстановку θ

Пусть $\mathtt{x}\theta = s$
Тогда $|\mathtt{x}\theta| = |s| < |t\,\{\mathtt{x}/s\}| \leq |t\theta|$ ($|p|$— *длина терма* p)

$|\mathtt{x}\theta| < |t\theta|$, а значит, $\mathtt{x}\theta \neq t\theta$ ▼

Алгоритм унификации

Унификация атомов

$$E_1 = \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k),\ E_2 = \mathrm{P}(s_1, \ldots, s_k)$$

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление подстановки θ, такой что левая (t_i) и правая (s_i) части каждого уравнения в системе

$$\mathcal{E}(E_1, E_2) = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \ldots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

становятся посимвольно одинаковыми при применении θ ко всем термам системы

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление **решения системы уравнений** $\mathcal{E}(E_1, E_2)$ в свободной[1] алгебре термов[2]

---

[1] Значение терма — это сам терм, то есть термы равны, если они посимвольно совпадают

[2] **Операция** композиции — это подстановка терма на место переменной

Алгоритм унификации

Для устранения неоднозначности нотации будем до конца лекции использовать такие обозначения: $(t, s \in \mathrm{Term})$

- $t{=}s$ — уравнение с левой частью t и правой частью s
- $t{\equiv}s$ — “термы t и s посимвольно совпадают”

Подстановка θ — унификатор системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases},$$

если $t_i\theta \equiv s_i\theta$ для каждого i, $1 \le i \le k$

Подстановка θ — наиболее общий унификатор системы уравнений $\mathcal{E}$ ($\theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$), если

1. θ — унификатор системы $\mathcal{E}$
2. для любого унификатора η системы $\mathcal{E}$ существует подстановка μ, такая что $\eta = \theta\mu$

Алгоритм унификации

Пример

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{z} \end{cases} \qquad \mathcal{E}\theta = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$

$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathbf{c}, \mathrm{z}/\mathbf{g}(\mathbf{c})\}$ —

(*наиболее общий*) унификатор системы $\mathcal{E}$

А система $\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{y}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{z} \end{cases}$

неунифицируема (*не имеет решений*) (почему?)

Алгоритм унификации

Утверждение
Пусть заданы атомы

$$E_1 = \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k),\ E_2 = \mathrm{P}(s_1, \dots, s_k)$$

и система уравнений

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(E_1, E_2) = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

Тогда $\text{НОУ}(E_1, E_2) = \text{НОУ}(\mathcal{E})$

Доказательство. Очевидно

(следует из определений наиболее общего унификатора)

Алгоритм унификации

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Пример

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathrm{z} = \mathrm{w} \\ \mathrm{u} = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases} \quad \text{— } \textbf{приведённая} \text{ система}$$

Алгоритм унификации

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Пример

$$\begin{cases} \mathtt{x} = \mathbf{f}(\mathtt{y}, \mathbf{g}(\mathtt{y})) \\ \mathtt{x} = \mathtt{w} \\ \mathtt{y} = \mathbf{g}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathtt{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathtt{x}) \end{cases}$$

— **неприведённая** система:

1. $\mathbf{g}(\mathtt{z})$ — не переменная, стоит в левой части уравнения
2. $\mathtt{x}$ встречается в левых частях два раза
3. $\mathtt{y}$ встречается и в левой, и в правой частях

Алгоритм унификации

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = t_1 \\ \ldots \\ \mathrm{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathrm{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Унификация, более сложный случай: НОУ$(\mathcal{E})$ =?

($\mathcal{E}$ — приведённая система уравнений)

Лемма о приведённой системе

Если $\mathcal{E} = \begin{cases} \mathrm{x}_1 = t_1 \\ \ldots \\ \mathrm{x}_k = t_k \end{cases}$ **— приведённая система,**

то $\{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_k/t_k\} \in$ **НОУ**$(\mathcal{E})$

Доказательство. Следует из леммы о связке ▼

Алгоритм унификации

Унификация, общий случай: НОУ($\mathcal{E}$) $=$?

($\mathcal{E}$ — произвольная система уравнений)

Системы уравнений $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ равносильны, если
НОУ($\mathcal{E}_1$) $=$ НОУ($\mathcal{E}_2$)

Будем преобразовывать систему $\mathcal{E}$
методом исключения переменных так, чтобы
в результате получилась равносильная приведённая система

Алгоритм унификации

Алгоритм унификации[1]

Далее будут описаны 6 правил преобразования системы уравнений

Эти правила произвольно (недетерминированно) применяются к системе, пока не станет верным одно из условий:

- получена приведённая система уравнений
  - ответ: унификатор из леммы о приведённой системе
- **явно** установлена невозможность унификации системы
  - ответ: СТОП: система неунифицируема

[1] Martelli A., Montanari U. An efficient unification algorithm. 1982

Алгоритм унификации

Правила преобразования системы уравнений

Упрощение системы: $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Triv: удалить $t = t$

Swap: заменить $t = \mathtt{x}$ на $\mathtt{x} = t$, если $t \notin \mathsf{Var}$

Func: заменить $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{f}(s_1, \ldots, s_k)$ на $\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \ldots \\ t_k = s_k \end{cases}$

Red: если в системе есть уравнение $Eq : \mathtt{x} = t$, где

- $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$
- $\mathtt{x}$ встречается в других уравнениях системы

то применить подстановку $\{\mathtt{x}/t\}$ ко всем уравнениям системы, кроме Eq

Алгоритм унификации

Правила преобразования системы уравнений

Явная неунифицируемость: $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

NRed: если в системе есть уравнение $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathtt{x} \not\equiv t$, то
СТОП: система неунифицируема

NFunc: если в системе есть уравнение
$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{g}(s_1, \ldots, s_m)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$, то
СТОП: система неунифицируема

Алгоритм унификации

Пример

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(y)) & = & \mathbf{f}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} & = & y \end{array} \right. \arrow[r, mapsto, "\text{Func}"] & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(y) & = & x \\ \mathbf{c} & = & y \end{array} \right. \arrow[d, mapsto, "\text{Swap}"'] \\
\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) & = & \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ y & = & \mathbf{c} \end{array} \right. \arrow[d, mapsto, "\text{Triv}"] & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(y) & = & x \\ y & = & \mathbf{c} \end{array} \right. \arrow[l, mapsto, "\text{Red} \times 2"'] \\
\left\{ \begin{array}{l} x = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ y = \mathbf{c} \end{array} \right. & \text{приведённая система} \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Ответ: $\{x/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ y/\mathbf{c}\} \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$

Алгоритм унификации

Пример

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(y)) & = & \mathbf{h}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} & = & y \end{array} \right.$$

$$\Big\downarrow \text{NFunc}$$

СТОП

Ответ: НОУ$(\mathcal{E}) = \emptyset$

Алгоритм унификации

Пример

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(x)) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} = y \end{cases} \xmapsto{\text{Func}} \begin{cases} x = \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(x) = x \\ \mathbf{c} = y \end{cases}$$

$$\xmapsto{\text{Swap}} \begin{cases} x = \mathbf{g}(y) \\ x = \mathbf{g}(x) \\ \mathbf{c} = y \end{cases} \xmapsto{\text{NRed}} \text{СТОП}$$

Ответ: НОУ$(\mathcal{E}) = \emptyset$

Алгоритм унификации

Теорема об унификации

Для любой системы уравнений $\mathcal{E}$

- алгоритм унификации завершает работу на $\mathcal{E}$ (завершаемость)
- по завершении работы алгоритмом выдаётся подстановка или сообщение СТОП (успешность)
- если выдана подстановка θ, то $\theta \in$ НОУ$(\mathcal{E})$ (корректность)
- если выдано сообщение СТОП, то система $\mathcal{E}$ неунифицируема (полнота)

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\to \infty$)

Далее будет строго сформулированы и обоснованы следующие факты:

- на каждом шаге работы алгоритма унификации система становится немного проще
- самая простая система обязательно будет получена после конечного числа шагов

Придумаем характеристику системы, которая
убывает на каждом шаге и при этом
не может убывать бесконечно долго

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

Переменная $\mathtt{x}$ — приведённая в $\mathcal{E}$, если $\mathcal{E}$ содержит уравнение вида $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$, и не содержит $\mathtt{x}$ в других уравнениях

Характеристика системы $\mathcal{E}$ — упорядоченная тройка чисел $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$, где

- $vr(\mathcal{E})$ — число **неприведённых** переменных системы $\mathcal{E}$
- $fs(\mathcal{E})$ — суммарное число функциональных символов и констант в **левых частях** уравнений $\mathcal{E}$
- $eq(\mathcal{E})$ — число уравнений системы $\mathcal{E}$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

Лексикографический порядок на тройках целых чисел определяется так:

$$\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \succ \langle m_1, m_2, m_3 \rangle \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 > m_1 \\ n_1 = m_1,\ n_2 > m_2 \\ n_1 = m_1,\ n_2 = m_2,\ n_3 > m_3 \end{array}\right.$$

Пример:

$$\langle 2, 11, 2 \rangle \succ \langle 2, 10, 5578 \rangle \succ \langle 2, 10, 5577 \rangle \succ \langle 1, 1001, 78 \rangle$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\to \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Triv:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ t = t \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) \geq fs(\mathcal{E}') \qquad eq(\mathcal{E}) > eq(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Swap:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ t = \mathrm{x} \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) > fs(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrowtail \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Func:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) = \mathbf{f}(s_1, \dots, s_k) \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \quad t_1 = s_1 \\ \quad \dots \\ \quad t_k = s_k \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) > fs(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Red:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) > vr(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 2: характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

Доказательство теоремы об унификации

Факт 2: характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

Начнём с наглядной иллюстрации этого факта

Представьте, что у Вас есть 10 килограммов конфет: вкусных, обычных и невкусных — и Вы пришли в пункт обмена конфет, в котором можно

- отдать вкусную конфету
  и взамен получить сколько угодно обычных и невкусных
- отдать обычную конфету
  и взамен получить сколько угодно невкусных
- отдать невкусную конфету (*всё равно Вам она не нужна*)

Если слишком увлечётесь обменом,
Вы обязательно останетесь без конфет

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

Характеристика: $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$
$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях
$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 2: характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

Лемма

Не существует бесконечной последовательности троек неотрицательных целых чисел, убывающей относительно лексикографического порядка

Доказательство леммы. Попробуйте сами

Эта лемма означает, что $(\mathbb{N}_0^3, \succ)$ — фундированное множество, или, по-другому, упорядоченное множество, обладающее свойством обрыва убывающих цепей

Доказательство теоремы об унификации

Успешность ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta$/СТОП)

Неуспешность алгоритма означает, что на некотором шаге работы получена **неприведённая** система $\mathcal{E}'$, к котороой **невозможно применить** ни одно из правил Triv, Swap, Func, Red, NFunc, NRed

Невозможно применить правила Triv, Swap, Func, NFunc $\Rightarrow$
в левых частях $\mathcal{E}'$ содержатся **только** переменные

Невозможно применить правила Red, NRed $\Rightarrow$
все переменные в левых частях $\mathcal{E}'$ являются приведёнными

Итог: если к $\mathcal{E}'$ невозможно применить ни одно из правил Triv, Swap, Func, Red, NFunc, NRed, то она обязательно является приведённой

Доказательство теоремы об унификации

Корректность ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$)

Достаточно показать, что при применении правил упрощения (Triv, Swap, Func, Red) получается система, **равносильная** исходной

Для правил Triv, Swap, Func это показать довольно просто

Подробно рассмотрим только правило Red:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases} \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

Покажем, что системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ **равносильны**:

$$\text{НОУ}(\mathcal{E}) = \text{НОУ}(\mathcal{E}')$$

Доказательство теоремы об унификации

Корректность ($\mathcal{E} \leadsto \theta \Rightarrow \theta \in$ НОУ$(\mathcal{E})$)

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases} \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

$$\text{НОУ}(\mathcal{E}) \stackrel{?}{=} \text{НОУ}(\mathcal{E}')$$

($\subseteq$): Пусть η — унификатор системы $\mathcal{E}$

Тогда $\mathrm{x}\eta \equiv t\eta$

Из доказательства леммы о связке: $\eta = \{\mathrm{x}/t\}\,\eta$, а значит,

$$\begin{cases} \dots\eta \\ \mathrm{x}\eta \equiv t\eta \\ \dots\eta \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\}\,\eta \\ \mathrm{x}\eta \equiv t\eta \\ \dots\{\mathrm{x}/t\}\,\eta \end{cases}$$

Следовательно, η — унификатор системы $\mathcal{E}'$

($\supseteq$): Рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы об унификации

Полнота ($\mathcal{E} \rightsquigarrow$ СТОП $\Rightarrow$ НОУ$(\mathcal{E}) = \emptyset$)

Пусть сообщение СТОП выдано для системы $\mathcal{E}'$

Пусть для этого было применено правило NFunc

Тогда $\mathcal{E}'$ содержит уравнение $\mathbf{f}(\dots) = \mathbf{g}(\dots)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$

Ни для какой подстановки θ не верно $\mathbf{f}(\dots)\theta \equiv \mathbf{g}(\dots)\theta$

Пусть для этого было применено правило NRed

Тогда $\mathcal{E}'$ содержит уравнение $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathtt{x} \not\equiv t$

Лемма о связке: ни для какой подстановки θ не верно $\mathtt{x}\theta \equiv t\theta$

Итог: система $\mathcal{E}'$ неунифицируема

Система $\mathcal{E}'$ была получена из $\mathcal{E}$ применением правил Triv, Swap, Func, Red

Корректность алгоритма: системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ равносильны

Значит, система $\mathcal{E}$ неунифицируема ▼