Математическая логика

и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2016, весенний семестр

Лекция 7

Задача унификации

Алгоритм унификации

Напоминание

$$\models \exists x\, (P(x) \,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y)) \ ?$$

$\Leftrightarrow$ отрицание $\psi = \neg\varphi$ противоречиво

$$\neg\exists x\, (P(x) \,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

$\Leftrightarrow$ предварённая нормальная форма ψ_{pnf} противоречива

$$\forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(z) \vee R(x,y)) \,\&\, \neg R(x,u))$$

$\Leftrightarrow$ сколемовская стандартная форма ψ_{ssf} противоречива

$$\forall x\, \forall u\, (P(x) \,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x))) \,\&\, \neg R(x,u))$$

$\Leftrightarrow$ система дизъюнктов S_φ противоречива

$$\left\{ \begin{array}{c} P(x) \\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)) \\ \neg R(x,u) \end{array} \right\}$$

А как эффективно проверить

противоречивость системы дизъюнктов?

Противоречия в системах дизъюнктов

- $\{P(x),\ \neg P(x)\}$

$$\begin{tikzcd} P(x) \arrow[dr] & & \neg P(x) \arrow[dl] \\ & \square & \end{tikzcd}$$

явное противоречие

- $\{\neg P(x),\ \neg Q(y),\ P(x) \vee Q(y)\}$

$$\begin{tikzcd} \neg P(x) \arrow[dr] & P(x) \vee Q(y) \arrow[d] & \neg Q(y) \arrow[ddl] \\ & Q(y) \arrow[d] & \\ & \square & \end{tikzcd}$$

явное противоречие

$\forall x\ \neg P(x),\ \forall x\ \forall y\ (P(x) \vee Q(y)) \models \forall y\ Q(y)$

Противоречия в системах дизъюнктов

- $\{P(\mathbf{f}(x), y),\ \neg P(u, \mathbf{g}(v))\}$

неявное противоречие

$$\begin{tikzcd}
P(\mathbf{f}(x), y) \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & \neg P(u, \mathbf{g}(v)) \arrow[dl] \arrow[d, dotted] \\
P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v)) \arrow[r, dotted] & \square & \neg P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v)) \arrow[l, dotted]
\end{tikzcd}$$

$$\forall x\ \forall y\ P(\mathbf{f}(x), y) \models \forall x\ \forall v\ P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$$

$$\forall u\ \forall v\ P(u, \mathbf{g}(v)) \models \forall x\ \forall v\ P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$$

Чтобы обнаружить неявное противоречие, потребовалось привести дизъюнкты к общему частному случаю

Приведение выражений к общему виду — это унификация

А насколько просто унифицировать атомы в логике предикатов?

Задача унификации

Унификация атомов A, B достигается применением к ним подстановки θ, такой что $A\theta = B\theta$

Напоминание

Подстановка — это отображение $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$

Конечная подстановка задаётся множеством связок:

$$\{\mathrm{x}_1/t_1, \ \ldots, \ \mathrm{x}_n/t_n\}$$

$E\theta$ — это результат применения подстановки θ к выражению E

Чтобы поставить и решить задачу унификации, исследуем алгебраические свойства подстановок

Задача унификации

Композиция подстановок θ, η — это подстановка $\theta\eta$, такая что для любой переменной $\mathtt{x}$ верно:

$$\mathtt{x}(\theta\eta) = (\mathtt{x}\theta)\eta$$

Утверждение

Пусть $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \dots, \mathtt{x}_n/t_n\}$ **и** $\eta = \{\mathtt{y}_1/s_1, \dots, \mathtt{y}_k/s_k\}$. **Тогда**

$$\theta\eta = \{\mathtt{x}_i/t_i\eta \mid 1 \le i \le n,\ x_i \ne t_i\eta\} \\ \cup \{\mathtt{y}_j/s_j \mid 1 \le j \le k,\ \mathtt{y}_j \notin \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n\}\}$$

Доказательство. Рассмотрим переменную $\mathtt{z} \in \mathsf{Var}$

Если $\mathtt{z} \notin \mathsf{Dom}_\theta \cup \mathsf{Dom}_\eta$, то $\mathtt{z}(\theta\eta) = (\mathtt{z}\theta)\eta = \mathtt{z}\eta = \mathtt{z}$

Если $\mathtt{z} = \mathtt{y}_j \in \mathsf{Dom}_\eta \setminus \mathsf{Dom}_\theta$, то $\mathtt{z}(\theta\eta) = (\mathtt{z}\theta)\eta = \mathtt{z}\eta = s_j$

Иначе $\mathtt{z} = \mathtt{x}_i \in \mathsf{Dom}_\theta$, и $\mathtt{z}(\theta\eta) = (\mathtt{z}\theta)\eta = t_i\eta$ ▼

Задача унификации

Пример

$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{x},\mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{u}),\ \mathrm{z}/\mathrm{y}\}$

$\eta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{y}/\mathrm{z}, \mathrm{u}/\mathbf{c}\}$

$\theta\eta =$?

$$\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{x},\mathbf{c})\eta,\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{u})\eta,\ \mathrm{z}/\mathrm{y}\eta\} \cup \{\mathrm{u}/\mathbf{c}\}$$

$$\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}),\mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ \mathrm{z}/\mathrm{z}\} \cup \{\mathrm{u}/\mathbf{c}\}$$

$$\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}),\mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{c})\} \cup \{\mathrm{u}/\mathbf{c}\}$$

$$\theta\eta = \{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}),\mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ \mathrm{u}/\mathbf{c}\}$$

Задача унификации

Подстановка θ — унификатор выражений E_1, E_2, если $E_1\theta = E_2\theta$

Выражения E_1, E_2 унифицируемы, если существует унификатор этих выражений

Пример. Подстановка $\theta = \{\mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathbf{f}(\mathrm{x})\}$ — унификатор атомов $\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})$, $\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))$:

$$\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})\theta = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{g}(\mathrm{v}))\theta = \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}), \mathbf{g}(\mathrm{v}))$$

Подстановка θ —

наиболее общий унификатор выражений E_1, E_2, если

1. θ — унификатор выражений E_1, E_2
2. для любого унификатора η выражений E_1, E_2 существует подстановка μ, такая что
$$\eta = \theta\mu$$

НОУ(E_1, E_2) — множество всех наиболее общих унификаторов выражений E_1, E_2

Задача унификации

Примеры

Подстановка $\eta = \{y/\mathbf{g}(\mathbf{g}(v)), u/\mathbf{f}(\mathbf{c}), v/\mathbf{g}(v), x/\mathbf{c}\}$ — унификатор атомов $P(\mathbf{f}(x), y)$, $P(u, \mathbf{g}(v))$:

$$P(\mathbf{f}(x), y)\eta = P(u, \mathbf{g}(v))\eta = P(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{g}(\mathbf{g}(v)))$$

А подстановка $\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\}$ — *более общий* их унификатор: $\eta = \theta\,\{v/\mathbf{g}(v), x/\mathbf{c}\}$

Оказывается, что θ —
наиболее общий унификатор атомов $P(\mathbf{f}(x), y)$, $P(u, \mathbf{g}(v))$

Но как это доказать? И как его получить?

А выражения $P(x, \mathbf{f}(x))$, $P(\mathbf{g}(y), y)$ **неунифицируемы**

А это как доказать?

Задача унификации

формулируется следующим образом:

для заданных выражений E_1, E_2

выяснить, унифицируемы ли эти выражения,

и если это так, то

вычислить их наиболее общий унификатор

Алгоритм унификации

Унификация, простой случай: НОУ$(\mathrm{x}, t) =?$ $\quad(\mathrm{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Лемма о связке

Пусть $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$ **и** $t \in \mathsf{Term}$. **Тогда:**

1. **если** $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$, **то** $\{\mathrm{x}/t\} \in$ **НОУ**(x, t)
2. **если** $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathrm{x} \neq t$, **то НОУ**$(\mathrm{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.

1. $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$

Достаточно показать, что:

а) $\{\mathrm{x}/t\}$ — унификатор

б) любой другой унификатор может быть получен из него

а) $\mathrm{x}\,\{\mathrm{x}/t\} = t = t\,\{\mathrm{x}/t\}$

Алгоритм унификации

Унификация, простой случай: НОУ$(\mathrm{x}, t) =?$ $\quad (\mathrm{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Лемма о связке

Пусть $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$ **и** $t \in \mathsf{Term}$. **Тогда:**

1. **если** $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$, **то** $\{\mathrm{x}/t\} \in$ **НОУ**(x, t)
2. **если** $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathrm{x} \neq t$, **то НОУ**$(\mathrm{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.

1б) $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$; покажем, что любой унификатор θ термов x, t может быть получен из $\{\mathrm{x}/t\}$, то есть $\exists \eta \quad \theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\eta$

Рассмотрим переменную y

Если $\mathrm{y} = \mathrm{x}$, то $\mathrm{y}\theta = \mathrm{x}\theta = t\theta = \mathrm{x}\,\{\mathrm{x}/t\}\theta = \mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\,\theta$

Если $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$, то $\mathrm{y}\theta = \mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\theta$

Итог: для любой переменной y верно равенство $\mathrm{y}\,\{\mathrm{x}/t\}\,\theta = \mathrm{y}\theta$, а значит, $\theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\theta$

Алгоритм унификации

Унификация, простой случай: НОУ$(\mathrm{x}, t) =?$ $\quad (\mathrm{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Лемма о связке

Пусть $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$ **и** $t \in \mathsf{Term}$. **Тогда:**

1. **если** $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$, **то** $\{\mathrm{x}/t\} \in$ **НОУ**(x, t)
2. **если** $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathrm{x} \neq t$, **то НОУ**$(\mathrm{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.

2. $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$, $\mathrm{x} \neq t$

Рассмотрим произвольную подстановку θ

Пусть $\mathrm{x}\theta = s$, и пусть $|p|$ — *длина* терма p

Тогда $|\mathrm{x}| < |t|$, и $|\mathrm{x}\theta| = |s| < |t\theta|$

Значит, $\mathrm{x}\theta \neq t\theta$ ▼

Алгоритм унификации

А как унифицировать атомы?

Сделать одинаковыми атомы

$$E_1 = \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k),\ E_2 = \mathrm{P}(s_1, \dots, s_k)$$

$$\Leftrightarrow$$

сделать одинаковыми соответствующие аргументы этих атомов

$$\Leftrightarrow$$

подобрать значения переменных, для которых становится верной система равенств

$$\mathcal{E}(E_1, E_2) = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

Алгоритм унификации

Подстановка θ — унификатор системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases},$$

если верны равенства $t_1\theta \equiv s_1\theta, \dots, t_k\theta \equiv s_k\theta$

Наиболее общий унификатор системы уравнений определяется так же, как и для логических выражений

(попробуйте определить самостоятельно)

Можно ли сказать, что мы **решаем** систему уравнений?

Да: унификатор системы уравнений — это **решение** системы в свободной[1] алгебре термов[2]

---

[1] Значение терма — это сам терм, то есть термы равны, если они синтаксически совпадают

[2] **Операция** композиции — это подстановка терма на место переменной

Алгоритм унификации

Пример

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{z} \end{cases} \qquad \mathcal{E}\theta = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$

$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathbf{c}, \mathrm{z}/\mathbf{g}(\mathbf{c})\}$ —
(*наиболее общий*) унификатор системы $\mathcal{E}$

А система $\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{y}) = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{z} \end{cases}$

неунифицируема (*не имеет решений*) (почему?)

Алгоритм унификации

Утверждение

Пусть заданы атомы

$$E_1 = \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k),\ E_2 = \mathrm{P}(s_1, \dots, s_k)$$

и система уравнений

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(E_1, E_2) = \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

Тогда НОУ$(E_1, E_2) =$ НОУ$(\mathcal{E})$

Доказательство. Очевидно

(следует из определений наиболее общего унификатора)

А как найти наиболее общий унификатор системы уравнений?

Алгоритм унификации

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Пример

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathrm{z} = \mathrm{w} \\ \mathrm{u} = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$ — **приведённая** система

Алгоритм унификации

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathtt{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Пример

$$\begin{cases} \mathtt{x} = \mathbf{f}(\mathtt{y}, \mathbf{g}(\mathtt{y})) \\ \mathtt{x} = \mathtt{w} \\ \mathtt{y} = \mathbf{g}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathtt{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathtt{x}) \end{cases}$$

— **неприведённая** система:

1. $\mathbf{g}(\mathtt{z})$ — не переменная, стоит в левой части уравнения
2. $\mathtt{x}$ встречается в левых частях два раза
3. $\mathtt{y}$ встречается и в левой, и в правой частях

Алгоритм унификации

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathrm{x}_k = t_k \end{cases},$$

где $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathrm{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Унификация, более сложный случай: НОУ$(\mathcal{E})$ =?

($\mathcal{E}$ — приведённая система уравнений)

Лемма о приведённой системе

Если $\mathcal{E} = \begin{cases} \mathrm{x}_1 = t_1 \\ \dots \\ \mathrm{x}_k = t_k \end{cases}$ **— приведённая система,**

то $\{\mathrm{x}_1/t_1, \dots, \mathrm{x}_k/t_k\} \in$ **НОУ**$(\mathcal{E})$

Доказательство. Самостоятельно (используйте лемму о связке)

Алгоритм унификации

Унификация, общий случай: НОУ($\mathcal{E}$) =?

($\mathcal{E}$ — произвольная система уравнений)

Что же делать с системой уравнений общего вида?

Будем преобразовывать эту систему **методом исключения переменных** так, чтобы в результате получилась равносильная приведённая система

А как определить равносильность систем уравнений?

Системы уравнений $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ равносильны, если
НОУ($\mathcal{E}_1$) = НОУ($\mathcal{E}_2$)

Алгоритм унификации

Алгоритм унификации[1]

Далее будут описаны 6 правил преобразования системы уравнений

Эти правила произвольно (недетерминированно) применяются к системе, пока не станет верным одно из условий:

- получена приведённая система уравнений
  - ответ: унификатор из леммы о приведённой системе
- **явно** установлена невозможность унификации системы
  - ответ: система не унифицируема

[1] Martelli A., Montanari U. An efficient unification algorithm. 1982

Алгоритм унификации

Правила преобразования системы уравнений

Упрощение системы: $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Triv: удалить $t = t$

Swap: заменить $t = \mathtt{x}$ на $\mathtt{x} = t$, если $t \notin \mathsf{Var}$

Func: заменить $\mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) = \mathbf{f}(s_1, \dots, s_k)$ на $\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$

Red: если в системе есть уравнение $Eq : \mathtt{x} = t$, где

- $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$
- $\mathtt{x}$ встречается в других уравнениях системы

то применить подстановку $\{\mathtt{x}/t\}$ ко всем уравнениям системы, кроме Eq

Алгоритм унификации

Правила преобразования системы уравнений

Явная неунифицируемость: $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

NRed: если в системе есть уравнение $\mathtt{x} = t$, где $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathtt{x} \neq t$, то
СТОП: система неунифицируема

NFunc: если в системе есть уравнение $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{g}(s_1, \ldots, s_m)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$, то
СТОП: система неунифицируема

Алгоритм унификации

Пример

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{x}) \\ \mathbf{c} = \mathrm{y} \end{cases} \xmapsto{\text{Func}} \begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{x} \\ \mathbf{c} = \mathrm{y} \end{cases}$$

$$\xmapsto{\text{Swap}} \begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) = \mathrm{x} \\ \mathrm{y} = \mathbf{c} \end{cases} \xmapsto{\text{Red} \times 2} \begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ \mathrm{y} = \mathbf{c} \end{cases}$$

$$\xmapsto{\text{Triv}} \begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ \mathrm{y} = \mathbf{c} \end{cases} \leftarrow \text{приведённая система}$$

Ответ: $\{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ \mathrm{y}/\mathbf{c}\} \in$ НОУ$(\mathcal{E})$

Алгоритм унификации

Пример

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(y)) & = & \mathbf{h}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} & = & y \end{array} \right.$$

$$\Big\downarrow \text{NFunc}$$

СТОП

Ответ: НОУ$(\mathcal{E}) = \emptyset$

Алгоритм унификации

Пример

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{x}) \\ \mathbf{c} = \mathrm{y} \end{cases} \xmapsto{\text{Func}} \begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \\ \mathbf{c} = \mathrm{y} \end{cases}$$

$$\xmapsto{\text{Swap}} \begin{cases} \mathrm{x} = \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathrm{x} = \mathbf{g}(\mathrm{x}) \\ \mathbf{c} = \mathrm{y} \end{cases} \xmapsto{\text{NRed}} \text{СТОП}$$

Ответ: НОУ$(\mathcal{E}) = \emptyset$

А всегда ли это работает?

Алгоритм унификации

Теорема об унификации

Для любой системы уравнений $\mathcal{E}$

- алгоритм унификации завершает работу на $\mathcal{E}$ (**завершаемость**)
- по завершении работы в ответ выдаётся подстановка или сообщение **СТОП** (**успешность**)
- если в ответ выдана подстановка θ, то $\theta \in$ **НОУ**$(\mathcal{E})$ (**корректность**)
- если в ответ выдано сообщение **СТОП**, то система $\mathcal{E}$ неунифицируема (**полнота**)

Доказательство теоремы. *Завершаемость* $(\mathcal{E} \not\rightsquigarrow \infty)$

Основная идея — сформулировать строго следующий факт:

на каждом шаге система становится немного проще, и
самая простая система рано или поздно будет получена

Придумаем характеристику системы, которая убывает на каждом шаге и при этом не может убывать бесконечно долго

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Завершаемость* $(\mathcal{E} \not\rightsquigarrow \infty)$

Переменная $\mathtt{x}$ — приведённая в $\mathcal{E}$, если $\mathcal{E}$ содержит $\mathtt{x}$ **только** в уравнении вида $\mathtt{x} = t$, причём $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$

Характеристика системы $\mathcal{E}$ — упорядоченная тройка чисел $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$, где

- $vr(\mathcal{E})$ — число неприведённых переменных системы $\mathcal{E}$
- $fs(\mathcal{E})$ — суммарное число функциональных символов и констант в левых частях уравнений $\mathcal{E}$
- $eq(\mathcal{E})$ — число уравнений системы $\mathcal{E}$

Введём лексикографический порядок на тройках целых чисел:

$$\langle n_1, n_2, n_3\rangle \succ \langle m_1, m_2, m_3\rangle \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 > m_1 \\ n_1 = m_1,\;\; n_2 > m_2 \\ n_1 = m_1,\;\; n_2 = m_2,\;\; n_3 > m_3 \end{array}\right.$$

Пример: $\langle 2, 11, 2\rangle \succ \langle 2, 10, 5578\rangle \succ \langle 2, 10, 5577\rangle \succ \langle 1, 1001, 78\rangle$

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Завершаемость* ($\mathcal{E} \not\rightsquigarrow \infty$)

1. Характеристика убывает при применении правил упрощения:

($\mathsf{R} \in \{\mathsf{Triv}, \mathsf{Swap}, \mathsf{Func}, \mathsf{Red}\}$)

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Triv:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ t = t \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad fs(\mathcal{E}) \geq fs(\mathcal{E}') \qquad eq(\mathcal{E}) > eq(\mathcal{E}')$$

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Завершаемость* $(\mathcal{E} \not\rightarrow \infty)$

1. Характеристика убывает при применении правил упрощения:

$(\mathsf{R} \in \{\mathsf{Triv}, \mathsf{Swap}, \mathsf{Func}, \mathsf{Red}\})$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Swap:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ t = \mathrm{x} \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases}$$

$$\mathit{vr}(\mathcal{E}) \geq \mathit{vr}(\mathcal{E}') \qquad\qquad \mathit{fs}(\mathcal{E}) > \mathit{fs}(\mathcal{E}')$$

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Завершаемость* ($\mathcal{E} \not\rightsquigarrow \infty$)

1. Характеристика убывает при применении правил упрощения:

($\mathsf{R} \in \{\mathsf{Triv}, \mathsf{Swap}, \mathsf{Func}, \mathsf{Red}\}$)

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Func:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) = \mathbf{f}(s_1, \dots, s_k) \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \\ \quad t_1 = s_1 \\ \quad \dots \\ \quad t_k = s_k \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) \geq vr(\mathcal{E}') \qquad\qquad fs(\mathcal{E}) > fs(\mathcal{E}')$$

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Завершаемость* ($\mathcal{E} \not\rightsquigarrow \infty$)

1. Характеристика убывает при применении правил упрощения:

$(\mathsf{R} \in \{\mathsf{Triv}, \mathsf{Swap}, \mathsf{Func}, \mathsf{Red}\})$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(\mathcal{E}) \succ \mathcal{H}(\mathcal{E}')$$

Правило Red:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathtt{x} = t \\ \dots \end{cases} \quad \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathtt{x}/t\} \\ \mathtt{x} = t \\ \dots\{\mathtt{x}/t\} \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}) > vr(\mathcal{E}')$$

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Завершаемость* ($\mathcal{E} \not\rightsquigarrow \infty$)

2. Характеристика не может убывать бесконечно долго

Лемма

Не существует бесконечной последовательности троек неотрицательных целых чисел, убывающей относительно лексикографического порядка

Иными словами, $(\mathbb{N}_0^3, \succ)$ — фундированное множество

Или, по-другому, множество $(\mathbb{N}_0^3, \succ)$ обладает свойством обрыва убывающих цепей

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Завершаемость* ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

2. Характеристика не может убывать бесконечно долго

Иллюстрация

Представьте, что у Вас есть 10 килограммов конфет: вкусных, обычных и невкусных

Начнём меняться конфетами:

- Вы даёте мне вкусную конфету, а я взамен — сколько попросите обычных и невкусных
- Вы даёте мне обычную конфету, а я взамен — сколько попросите невкусных
- Вы даёте мне невкусную конфету и не получаете ничего взамен

Если продолжать меняться конфетами, пока это возможно, то рано или поздно Вы останетесь без конфет

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Завершаемость* ($\mathcal{E} \not\rightarrow \infty$)

2. Характеристика не может убывать бесконечно долго

Лемма

Не существует бесконечной последовательности троек натуральных чисел (с нолём), убывающей относительно лексикографического порядка

Иными словами, $(\mathbb{N}_0^3, \succ)$ — фундированное множество

Или, по-другому, множество $(\mathbb{N}_0^3, \succ)$ обладает свойством обрыва убывающих цепей

Доказательство леммы. Самостоятельно

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Успешность* ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta$/СТОП)

Что означает неуспешность?

Она означает, что алгоритмом получена **неприведённая** система $\mathcal{E}'$, к которой **не применимо** ни одно из правил Triv, Swap, Func, Red, NFunc, NRed

Правила Triv, Swap, Func, NFunc неприменимы:

В левых частях уравнений системы содержатся **только** переменные

Правила Red, NRed неприменимы:

Переменная, стоящая в левой части уравнения Eq, встречается **только** в левой части Eq

Итог: система $\mathcal{E}'$ обязана быть приведённой

Значит, такую систему $\mathcal{E}'$ получить нельзя

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Корректность* ($\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in$ НОУ$(\mathcal{E})$)

Достаточно показать, что при применении правил Triv, Swap, Func, Red получается система, **равносильная** исходной

Для правил Triv, Swap, Func это очевидно

(то есть докажите самостоятельно)

Остановимся на правиле Red:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases} \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

Покажем, что системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ **равносильны**

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Корректность* $(\mathcal{E} \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E}))$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} = t \\ \dots \end{cases} \mapsto \quad \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} = t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

Покажем, что системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ **равносильны**

$(\Rightarrow)$: Пусть η — унификатор системы $\mathcal{E}$

Тогда $\mathrm{x}\eta = t\eta$

Доказательство леммы о связке: $\eta = \{\mathrm{x}/t\}\,\eta$, а значит,

$$\begin{cases} \dots\eta \\ \mathrm{x}\eta \equiv t\eta \\ \dots\eta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\}\,\eta \\ \mathrm{x}\eta \equiv t\eta \\ \dots\{\mathrm{x}/t\}\,\eta \end{cases}$$

Значит, η — унификатор системы $\mathcal{E}'$

$(\Leftarrow)$: Рассуждения аналогичны

Алгоритм унификации

Доказательство теоремы. *Полнота* ($\mathcal{E} \rightsquigarrow$ СТОП $\Rightarrow$ НОУ$(\mathcal{E}) = \emptyset$)

Пусть сообщение СТОП выдано для системы $\mathcal{E}'$

Пусть для этого было применено правило NFunc

Тогда $\mathcal{E}'$ содержит уравнение $\mathbf{f}(\dots) = \mathbf{g}(\dots)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$

Ни для какой подстановки θ не будет верно $\mathbf{f}(\dots)\theta = \mathbf{g}(\dots)\theta$

Пусть для этого было применено правило NRed

Тогда $\mathcal{E}'$ содержит уравнение $\mathrm{x} = t$, где $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathrm{x} \neq t$

Лемма о связке: ни для какой подстановки θ не верно $\mathrm{x}\theta = t\theta$

Итог: система $\mathcal{E}'$ неунифицируема

Система $\mathcal{E}'$ была получена из $\mathcal{E}$ применением правил Triv, Swap, Func, Red

Доказательство корректности: системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ равносильны

Значит, система $\mathcal{E}$ неунифицируема ▼

Конец лекции 7