Математическая логика и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2015, весенний семестр

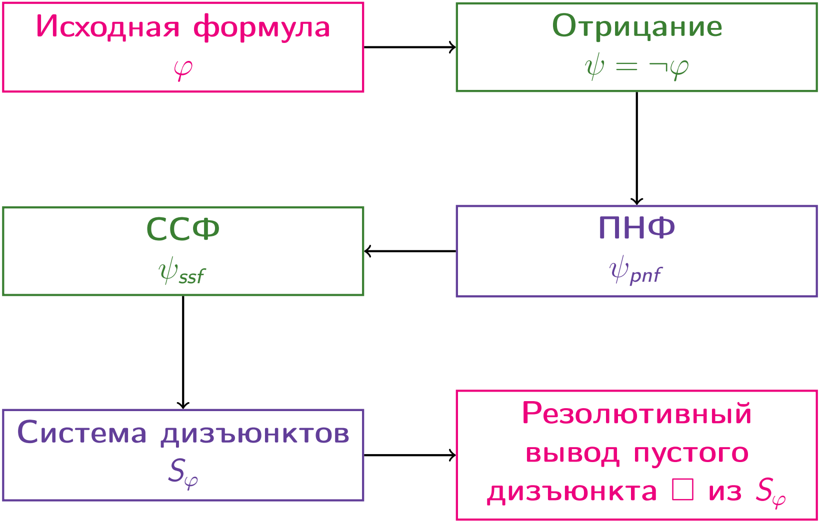
Лекция 7

Эрбрановские интерпретации

Теорема Эрбрана

Задача унификации

Общая схема метода резолюций



Общая схема метода резолюций

Общая схема метода резолюций

Проверка общезначимости формулы φ сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ:

Этап 1. Перейти к проверке противоречивости отрицания:

$$\varphi \rightsquigarrow \psi = \neg\varphi$$

Этап 2. Привести формулу к предварённой нормальной форме (ПНФ):

$$\psi \rightsquigarrow \psi_{pnf} = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n (D_1 \& \dots \& D_k)$$

Этап 3. Построить формулу в сколемовской стандартной форме (ССФ) по ПНФ:

$$\psi_{pnf} \rightsquigarrow \psi_{ssf} = \forall x_1 \dots \forall x_n (D_1 \& \dots \& D_k)$$

Этап 4. Построить систему дизъюнктов по ССФ:

$$\psi_{ssf} \rightsquigarrow S_\varphi = \{D_1, \dots, D_k\}$$

φ общезначима $\Leftrightarrow$ система дизъюнктов S_φ противоречива

Эрбрановские интерпретации

Система дизъюнктов $S = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ противоречива

$\Leftrightarrow$

для каждой интерпретации I

в системе S найдется дизъюнкт

$$D_i = \forall x_1 \dots \forall x_n \, (L_1 \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$$

и в предметной области найдутся предметы

$$d_1, \dots, d_n,$$

такие что

$$I \not\models L_{1i}[d_1, \dots, d_n], \; I \not\models L_{2i}[d_1, \dots, d_n], \; \dots, \; I \not\models L_{k_i i}[d_1, \dots, d_n]$$

А можно ли сократить множество рассматриваемых интерпретаций?

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановские интерпретации (H-интерпретации, названные в честь французского математика Jacques Herbrand (1908-1931)) — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат **свободные алгебры**

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановские интерпретации (H-интерпретации, названные в честь французского математика Jacques Herbrand (1908-1931)) — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат **свободные алгебры**

Предметная область эрбрановских интерпретаций называется **эрбрановским универсумом** (H-**универсумом**)

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановские интерпретации (H-интерпретации, названные в честь французского математика Jacques Herbrand (1908-1931)) — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат **свободные алгебры**

Предметная область эрбрановских интерпретаций называется **эрбрановским универсумом** (**H-универсумом**)

Определение H-универсума. **Пусть задана некоторая сигнатура $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$. Тогда эрбрановским универсумом сигнатуры σ называется множество термов $H_\sigma = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$, где:**

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановские интерпретации (H-интерпретации, названные в честь французского математика Jacques Herbrand (1908-1931)) — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат **свободные алгебры**

Предметная область эрбрановских интерпретаций называется **эрбрановским универсумом** (H-**универсумом**)

Определение H-универсума. **Пусть задана некоторая сигнатура $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$. Тогда эрбрановским универсумом сигнатуры σ называется множество термов $H_\sigma = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$, где:**

$$i = 0 \quad H_0 = \begin{cases} Const, \text{ если } Const \neq \emptyset \\ \{c\}, \text{ если } Const = \emptyset \text{ (эрбрановская константа)} \end{cases}$$

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановские интерпретации (H-интерпретации, названные в честь французского математика Jacques Herbrand (1908-1931)) — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат **свободные алгебры**

Предметная область эрбрановских интерпретаций называется **эрбрановским универсумом** (H-**универсумом**)

Определение H-универсума. Пусть задана некоторая сигнатура $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$. Тогда эрбрановским универсумом сигнатуры σ называется множество термов $H_\sigma = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} H_i$, где:

$$i = 0 \quad H_0 = \begin{cases} Const, \text{ если } Const \neq \emptyset \\ \{c\}, \text{ если } Const = \emptyset \text{ (эрбрановская константа)} \end{cases}$$

$$i \to i+1 \quad H_{i+1} = H_i \ \cup \ \{f^{(k)}(t_1, \dots, t_k) \ : \ f^{(k)} \in Func, \ t_1, \dots, t_k \in H_i\}$$

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский универсум — это множество всех термов, которые можно построить из констант и функциональных символов заданной сигнатуры. Термы эрбрановского универсума не содержат переменных и называются основными термами

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский универсум — это множество всех термов, которые можно построить из констант и функциональных символов заданной сигнатуры. Термы эрбрановского универсума не содержат переменных и называются основными термами

Пример

Пусть $Const = \emptyset$, $Func = \{f^{(1)}, g^{(2)}\}$. Тогда:

$i = 0$ $H_0 = \{c\}$ (эрбрановская константа, т. к. $Const = \emptyset$)

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский универсум — это множество всех термов, которые можно построить из констант и функциональных символов заданной сигнатуры. Термы эрбрановского универсума не содержат переменных и называются основными термами

Пример

Пусть $Const = \emptyset$, $Func = \{f^{(1)}, g^{(2)}\}$. Тогда:

$i = 0$ $H_0 = \{c\}$ (эрбрановская константа, т. к. $Const = \emptyset$)

$i = 1$ $H_1 = \{c,\ f(c),\ g(c, c)\}$

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский универсум — это множество всех термов, которые можно построить из констант и функциональных символов заданной сигнатуры. Термы эрбрановского универсума не содержат переменных и называются основными термами

Пример

Пусть $Const = \emptyset$, $Func = \{f^{(1)}, g^{(2)}\}$. Тогда:

$i = 0$ $H_0 = \{c\}$ (эрбрановская константа, т. к. $Const = \emptyset$)

$i = 1$ $H_1 = \{c,\ f(c),\ g(c,c)\}$

$i = 2$ $H_2 = \{c, f(c), g(c,c),$
$f(f(c)), f(g(c,c)), g(f(c),c), g(c,f(c)),$
$g(f(c),f(c)), g(c,g(c,c)), g(g(c,c),c),$
$g(g(c,c),g(c,c)), g(f(c),g(c,c)), g(g(c,c),f(c))\}$

$i = 3$ и т. д.

Эрбрановские интерпретации

Определение H-интерпретации. Эрбрановская интерпретация $I_H = \langle H_\sigma, \overline{Const}_H, \overline{Func}_H, \overline{Pred} \rangle$ **сигнатуры** $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ **состоит из**

Эрбрановские интерпретации

Определение H-интерпретации. **Эрбрановская интерпретация** $I_H = \langle H_\sigma, \overline{Const}_H, \overline{Func}_H, \overline{Pred} \rangle$ **сигнатуры** $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ **состоит из**

- **стандартной предметной области — эрбрановского универсума** H_σ

Эрбрановские интерпретации

Определение H-интерпретации. **Эрбрановская интерпретация** $I_H = \langle H_\sigma, \overline{Const}_H, \overline{Func}_H, \overline{Pred} \rangle$ **сигнатуры** $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ **состоит из**

- **стандартной предметной области — эрбрановского универсума** H_σ
- **стандартной оценки констант:** $\overline{Const}_H(c) = c$, **т. е.** <u>**значением каждого константного символа** c **является его собственное изображение**</u>

Эрбрановские интерпретации

Определение H-интерпретации. **Эрбрановская интерпретация** $I_H = \langle H_\sigma, \overline{Const}_H, \overline{Func}_H, \overline{Pred} \rangle$ **сигнатуры** $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ **состоит из**

- **стандартной предметной области — эрбрановского универсума** H_σ
- **стандартной оценки констант:** $\overline{Const}_H(c) = c$**,** **т. е.** <u>**значением каждого константного символа** c **является его собственное изображение**</u>
- **стандартной оценки функциональных символов:** $\overline{Func}_H(f^{(n)}) = \mathbf{f} : \ \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$**,** **т. е.** <u>**каждый функциональный символ** f **играет роль конструктора термов эрбрановского универсума**</u>

Эрбрановские интерпретации

Определение H-интерпретации. **Эрбрановская интерпретация** $I_H = \langle H_\sigma, \overline{Const}_H, \overline{Func}_H, \overline{Pred} \rangle$ **сигнатуры** $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ **состоит из**

- **стандартной предметной области — эрбрановского универсума** H_σ
- **стандартной оценки констант:** $\overline{Const}_H(c) = c$**,** **т. е.** <u>**значением каждого константного символа** c **является его собственное изображение**</u>
- **стандартной оценки функциональных символов:** $\overline{Func}_H(f^{(n)}) = \mathbf{f} : \ \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$**,** **т. е.** <u>**каждый функциональный символ** f **играет роль конструктора термов эрбрановского универсума**</u>
- **произвольной оценки предикатных символов**

Таким образом, разные H-интерпретации отличаются только истолкованием предикатных символов.

Эрбрановские интерпретации

Преимущества эрбрановских интерпретаций

- Не нужно заботиться о выборе области интерпретации — у всех H-интерпретаций одна и та же предметная область — H-универсум

Эрбрановские интерпретации

Преимущества эрбрановских интерпретаций

- Не нужно заботиться о выборе области интерпретации — у всех H-интерпретаций одна и та же предметная область — H-универсум
- Не нужно заботиться об оценке функциональных символов — у всех H-интерпретаций одна и та же стандартная оценка $\overline{Const}_H$ и $\overline{Func}_H$

Эрбрановские интерпретации

Преимущества эрбрановских интерпретаций

- Не нужно заботиться о выборе области интерпретации — у всех H-интерпретаций одна и та же предметная область — H-универсум
- Не нужно заботиться об оценке функциональных символов — у всех H-интерпретаций одна и та же стандартная оценка $\overline{Const}_H$ и $\overline{Func}_H$
- И, самое главное, для проверки противоречивости систем дизъюнктов достаточно ограничиться только H-интерпретациями

Эрбрановские интерпретации

Теорема об H-интерпретациях

Система дизъюнктов S выполнима тогда и только тогда, когда S имеет эрбрановскую модель, т. е. выполнима хотя бы в одной H-интерпретации

Эрбрановские интерпретации

Теорема об H-интерпретациях

Система дизъюнктов S выполнима тогда и только тогда, когда S имеет эрбрановскую модель, т. е. выполнима хотя бы в одной H-интерпретации

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Очевидно

Эрбрановские интерпретации

Теорема об H-интерпретациях

Система дизъюнктов S выполнима тогда и только тогда, когда S имеет эрбрановскую модель, т. е. выполнима хотя бы в одной H-интерпретации

Доказательство.

($\Leftarrow$) Очевидно

($\Rightarrow$) Пусть $S = \{D_1, \ \ldots, D_N\}$, и $I = \langle \mathcal{D}_I, \overline{Const}_I, \overline{Func}_I, \overline{Pred}_I \rangle$ — некоторая модель для S, т. е. для любого дизъюнкта $D_i = \forall x_1 \ldots \forall x_n \ (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})$ из S и для любого набора элементов $d_1, \ldots, d_n$ из $\mathcal{D}_I$ имеет место

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})[d_1, \ldots, d_n]$$

Эрбрановские интерпретации

Теорема об H-интерпретациях

Система дизъюнктов S выполнима тогда и только тогда, когда S имеет эрбрановскую модель, т. е. выполнима хотя бы в одной H-интерпретации

Доказательство.

($\Leftarrow$) Очевидно

($\Rightarrow$) Пусть $S = \{D_1, \ \ldots, D_N\}$, и $I = \langle \mathcal{D}_I, \overline{Const}_I, \overline{Func}_I, \overline{Pred}_I \rangle$ — некоторая модель для S, т. е. для любого дизъюнкта $D_i = \forall x_1 \ldots \forall x_n \ (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})$ из S и для любого набора элементов $d_1, \ldots, d_n$ из $\mathcal{D}_I$ имеет место

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})[d_1, \ldots, d_n]$$

Покажем, что существует H-интерпретация J_H, в которой выполняется каждый дизъюнкт D_i из S

Эрбрановские интерпретации

Доказательство.
Пусть σ — сигнатура системы дизъюнктов S. Рассмотрим эрбрановский универсум H_σ и отображение

$$\alpha \ : \ H_\sigma \ \to \ \mathcal{D}_I,$$

которое каждому основному терму $t \in H_\sigma$ сопоставляет элемент $\alpha(t) = d_t \in \mathcal{D}_I$, равный значению терма t в интерпретации I

Эрбрановские интерпретации

Доказательство.

Пусть σ — сигнатура системы дизъюнктов S. Рассмотрим эрбрановский универсум H_σ и отображение

$$\alpha \ : \ H_\sigma \ \to \ \mathcal{D}_I,$$

которое каждому основному терму $t \in H_\sigma$ сопоставляет элемент $\alpha(t) = d_t \in \mathcal{D}_I$, равный значению терма t в интерпретации I

Оценку $\overline{Pred}_H$ предикатных символов в H-интерпретации J определим так:

для любого предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \ldots, t_m \in H_\sigma$ положим

$$\overline{P}_{J_H}(t_1, \ldots, t_m) = \textbf{true} \iff \overline{P}_I(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_m)) = \textbf{true}$$

Эта оценка однозначно определяет H-интерпретацию J_H

Эрбрановские интерпретации

Доказательство.

Тогда для любого функционального символа f, предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$\alpha(f(t_1, \dots, t_m)) = \overline{f}_I(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)),$$

$$J_H \models P[t_1, \dots, t_m] \iff I \models P[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)]$$

Эрбрановские интерпретации

Доказательство.

Тогда для любого функционального символа f, предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$\alpha(f(t_1, \dots, t_m)) = \overline{f}_I(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)),$$

$$J_H \models P[t_1, \dots, t_m] \iff I \models P[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)]$$

Отображение α — это гомоморфизм интерпретации J_H в интерпретацию I

Эрбрановские интерпретации

Доказательство.

Тогда для любого функционального символа f, предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$\alpha(f(t_1, \dots, t_m)) = \overline{f}_I(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)),$$

$$J_H \models P[t_1, \dots, t_m] \iff I \models P[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)]$$

Отображение α — это гомоморфизм интерпретации J_H в интерпретацию I

Значит, для **любого** дизъюнкта $D' = \forall x_1 \dots \forall x_m \ (L_1 \vee \dots \vee L_k)$ и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$J_H \models (L_1 \vee \dots \vee L_k)[t_1, \dots, t_m] \iff I \models (L_1 \vee \dots \vee L_k)[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)]$$

Эрбрановские интерпретации

Доказательство.
Итак, для любого дизъюнкта
$D_i = \forall x_1 \dots \forall x_n \ (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$ из S и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_n \in H_\sigma$ имеем

$$J_H \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[t_1, \dots, t_n] \qquad \iff$$

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)].$$

Эрбрановские интерпретации

Доказательство.

Итак, для любого дизъюнкта $D_i = \forall x_1 \dots \forall x_n\ (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i})$ из S и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_n \in H_\sigma$ имеем

$$J_H \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[t_1, \dots, t_n] \iff I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)].$$

Поскольку I — модель для системы дизъюнктов S, верно

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)].$$

Значит, все дизъюнкты из S выполнимы в построенной эрбрановской интерпретации J_H

<u>**конец доказательства**</u>

Эрбрановские интерпретации

Следствие

Система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда, когда S не выполнима ни в одной эрбрановской интерпретации

Значит, для проверки противоречивости систем дизъюнктов достаточно исследовать только эрбрановские интерпретации

Эрбрановские интерпретации

Как задавать H-интерпретации?

Эрбрановские интерпретации полностью определяются оценкой предикатных символов. Значит, достаточно указать оценку всех предикатных символов

Эрбрановские интерпретации

Как задавать H-интерпретации?

Эрбрановские интерпретации полностью определяются оценкой предикатных символов. Значит, достаточно указать оценку всех предикатных символов

Пусть $P^{(m)} \in Pred$, и $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ — набор основных термов. Тогда формула $P^{(m)}(t_1, \dots, t_m)$ называется основным атомом. Множество всех основных атомов называется эрбрановским базисом и обозначается B_H

Эрбрановские интерпретации

Как задавать H-интерпретации?

Эрбрановские интерпретации полностью определяются оценкой предикатных символов. Значит, достаточно указать оценку всех предикатных символов

Пусть $P^{(m)} \in Pred$, и $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ — набор основных термов. Тогда формула $P^{(m)}(t_1, \dots, t_m)$ называется основным атомом. Множество всех основных атомов называется эрбрановским базисом и обозначается B_H

Всякая H-интерпретация I задается подмножеством B^I истинных основных атомов:

$$B^I = \{P^{(m)}(t_1, \dots, t_m) \ : \ I \models P^{(m)}(t_1, \dots, t_m), \{t_1, \dots, t_m\} \subseteq H\}$$

Эрбрановские интерпретации

Примеры

- $B^I = \emptyset$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно ложны

$$I \models P^{(m)}[t_1, \dots, t_m] \iff P^{(m)}(t_1, \dots, t_m) \in \emptyset$$

Эрбрановские интерпретации

Примеры

- $B^I = \emptyset$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно ложны
- $B^I = B_H$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно истинны

Эрбрановские интерпретации

Примеры

- $B^I = \emptyset$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно ложны
- $B^I = B_H$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно истинны
- Пересечение $B^{I_1} \cap B^{I_2}$ задает интерпретацию, в которой истинны те и только те отношения, которые истинны в обеих интерпретациях I_1 и I_2

Это очень удобный способ задания интерпретаций, позволяющий проводить над ними теоретико-множественные операции

Эрбрановские интерпретации

Примеры

- $B^I = \emptyset$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно ложны
- $B^I = B_H$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно истинны
- Пересечение $B^{I_1} \cap B^{I_2}$ задает интерпретацию, в которой истинны те и только те отношения, которые истинны в обеих интерпретациях I_1 и I_2

  Это очень удобный способ задания интерпретаций, позволяющий проводить над ними теоретико-множественные операции

В дальнейшем все H-интерпретации мы будем ассоциировать с подмножествами эрбрановского базиса B_H

Теорема Эрбрана

Вернемся к системам дизъюнктов

Пусть имеется дизъюнкт $D = \forall x_1 \ldots \forall x_m \ (L_1 \vee \cdots \vee L_k)$ и набор основных термов $t_1, \ldots, t_m$ из эрбрановского универсума H_σ

Теорема Эрбрана

Вернемся к системам дизъюнктов

Пусть имеется дизъюнкт $D = \forall x_1 \ldots \forall x_m\ (L_1 \vee \cdots \vee L_k)$ и набор основных термов $t_1, \ldots, t_m$ из эрбрановского универсума H_σ

Тогда дизъюнкт $D' = (L_1 \vee \cdots \vee L_k)\{x_1/t_1, \ldots, x_m/t_m\}$, полученный из D подстановкой основных термов $t_1, \ldots, t_m$ вместо всех переменных дизъюнкта D, называется основным примером дизъюнкта D

Теорема Эрбрана

Вернемся к системам дизъюнктов

Пусть имеется дизъюнкт $D = \forall x_1 \ldots \forall x_m \ (L_1 \vee \cdots \vee L_k)$ и набор основных термов $t_1, \ldots, t_m$ из эрбрановского универсума H_σ

Тогда дизъюнкт $D' = (L_1 \vee \cdots \vee L_k)\{x_1/t_1, \ldots, x_m/t_m\}$, полученный из D подстановкой основных термов $t_1, \ldots, t_m$ вместо всех переменных дизъюнкта D, называется **основным примером** дизъюнкта D

Пример

$D = \forall x_1 \forall x_2 \ (\neg R(x_1, x_2) \vee P(h(x_1)))$ — дизъюнкт

Теорема Эрбрана

Вернемся к системам дизъюнктов

Пусть имеется дизъюнкт $D = \forall x_1 \dots \forall x_m \ (L_1 \vee \dots \vee L_k)$ и набор основных термов $t_1, \dots, t_m$ из эрбрановского универсума H_σ

Тогда дизъюнкт $D' = (L_1 \vee \dots \vee L_k)\{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$, полученный из D подстановкой основных термов $t_1, \dots, t_m$ вместо всех переменных дизъюнкта D, называется **основным примером** дизъюнкта D

Пример

$D = \forall x_1 \forall x_2 \ (\neg R(x_1, x_2) \vee P(h(x_1)))$ — дизъюнкт

$D' = \neg R(g(c'), c'') \vee P(h(g(c'))) = D\{x_1/g(c'), x_2/c''\}$ — основной пример

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов $S = \{D_1,\ D_2,\ \ldots, D_N\}$ противоречива

$$\Longleftrightarrow$$

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов $S = \{D_1,\ D_2,\ \dots, D_N\}$ противоречива

$$\iff$$

для каждой H-интерпретации I в S найдется такой дизъюнкт $D_i = (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$ и такой набор основных термов $t_1, \dots, t_m$, для которых имеют место

$$I \not\models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots L_{k_i i})[t_1, \dots, t_m]$$

$$\iff$$

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов $S = \{D_1,\ D_2,\ \dots, D_N\}$ противоречива

$$\Longleftrightarrow$$

для каждой *H-интерпретации* I в S найдется такой дизъюнкт $D_i = (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$ и такой набор основных термов $t_1, \dots, t_m$, для которых имеют место

$$I \not\models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots L_{k_i i})[t_1, \dots, t_m]$$

$$\Longleftrightarrow$$

для каждой *H-интерпретации* I существует основной пример $D' = D_i\{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$ дизъюнкта из системы S, для которого

$$I \not\models D'.$$

Теорема Эрбрана

Рассмотрим множество основных примеров дизъюнктов

$$\mathcal{G}_S = \{D' : \; D' \text{ — основной пример дизъюнкта из } S, \text{ существует эрбрановская интерпретация } I \subseteq B_H : I \not\models D'\}$$

Теорема Эрбрана

Рассмотрим множество основных примеров дизъюнктов

$$\mathcal{G}_S = \{D' : \; D' \text{ — основной пример дизъюнкта из } S, \text{ существует эрбрановская интерпретация } I \subseteq B_H : I \not\models D'\}$$

Тогда система дизъюнктов S противоречива

$$\Longleftrightarrow$$

система основных примеров $\mathcal{G}_S$ противоречива

Теорема Эрбрана

Вспомним теорему компактности Мальцева

$\Gamma \models \varphi \iff$ **существует такое конечное** Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, **что** $\Gamma' \models \varphi$

Теорема Эрбрана

Вспомним теорему компактности Мальцева

$\Gamma \models \varphi \iff$ существует такое конечное Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, что $\Gamma' \models \varphi$

$$\Updownarrow$$

Множество замкнутых формул Γ имеет модель тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, имеет модель

Теорема Эрбрана

Вспомним теорему компактности Мальцева

$\Gamma \models \varphi \iff$ существует такое конечное Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, что $\Gamma' \models \varphi$

$$\Updownarrow$$

Множество замкнутых формул Γ имеет модель тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, имеет модель

Таким образом, множество основных примеров дизъюнктов $\mathcal{G}_S$ противоречиво

$$\iff$$

существует конечное противоречивое подмножество $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}_S$

Теорема Эрбрана

Вспомним теорему компактности Мальцева

$\Gamma \models \varphi \iff$ **существует такое конечное** Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, **что** $\Gamma' \models \varphi$

$$\Updownarrow$$

Множество замкнутых формул Γ **имеет модель тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество** Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, **имеет модель**

Таким образом, множество основных примеров дизъюнктов $\mathcal{G}_S$ противоречиво

$$\iff$$

существует **конечное** противоречивое подмножество $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}_S$

И в результате проведенных рассуждений мы приходим к

Теореме Эрбрана

Теорема Эрбрана

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_N\}$ противоречива

$$\iff$$

существует конечное противоречивое множество $\mathcal{G}'$ основных примеров дизъюнктов системы S

Теорема Эрбрана

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_N\}$ противоречива

$$\Longleftrightarrow$$

существует конечное противоречивое множество $\mathcal{G}'$ основных примеров дизъюнктов системы S

В чем состоит главная особенность теоремы Эрбрана?

Теорема Эрбрана

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_N\}$ противоречива

$$\Longleftrightarrow$$

существует конечное противоречивое множество $\mathcal{G}'$ основных примеров дизъюнктов системы S

В чем состоит главная особенность теоремы Эрбрана?

Основной пример дизъюнкта не содержит **предметных переменных**, и поэтому является простой **булевой формулой**

Таким образом проблема общезначимости формул логики предикатов (сложная проблема!!!) сводится к проблеме выполнимости булевой формулы (простой проблеме??!!)

Теорема Эрбрана

Маленькое лукавство.

Увы, теорема Эрбрана не сообщает нам ничего о том, КАКИЕ основные примеры дизъюнктов образуют это противоречивое множество $\mathcal{G}'$

Теорема Эрбрана

Маленькое лукавство.

Увы, теорема Эрбрана не сообщает нам ничего о том, КАКИЕ основные примеры дизъюнктов образуют это противоречивое множество $\mathcal{G}'$

Нам нужно придумать механизм поиска этого противоречивого множества $\mathcal{G}'$

Теорема Эрбрана

Маленькое лукавство.

Увы, теорема Эрбрана не сообщает нам ничего о том, КАКИЕ основные примеры дизъюнктов образуют это противоречивое множество $\mathcal{G}'$

Нам нужно придумать механизм поиска этого противоречивого множества $\mathcal{G}'$

Дэвис и Патнем предложили использовать компьютер для перебора всех эрбрановских интерпретаций в поиске противоречивой системы основных примеров дизъюнктов. Но Дж. Робинсон поступил хитрее...

Теорема Эрбрана

Маленькое лукавство.

Увы, теорема Эрбрана не сообщает нам ничего о том, КАКИЕ основные примеры дизъюнктов образуют это противоречивое множество $\mathcal{G}'$

Нам нужно придумать механизм поиска этого противоречивого множества $\mathcal{G}'$

Дэвис и Патнем предложили использовать компьютер для перебора всех эрбрановских интерпретаций в поиске противоречивой системы основных примеров дизъюнктов. Но Дж. Робинсон поступил хитрее...

Из дизъюнктов системы S нужно устранять потенциальные противоречия, пока не будут устранены все источники противоречия или не будет получено неустранимое (явное) противоречие

Теорема Эрбрана

Если в системе S содержатся дизъюнкты $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$, то, очевидно, S противоречива (явное противоречие)

Теорема Эрбрана

Если в системе S содержатся дизъюнкты $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$, то, очевидно, S противоречива (явное противоречие)

А если в S есть дизъюнкты $D_1 = D_1' \vee L$ и $D_2 = D_2' \vee \neg L$, то $I \models D_1$ и $I \models D_2$ влечет $I \models D_1' \vee D_2'$. Значит, добавление дизъюнкта $D_0 = D_1' \vee D_2'$ к S не нарушает ее выполнимости. Зато устраняется потенциальное противоречие L и $\neg L$

Теорема Эрбрана

Если в системе S содержатся дизъюнкты $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$, то, очевидно, S противоречива (явное противоречие)

А если в S есть дизъюнкты $D_1 = D_1' \vee L$ и $D_2 = D_2' \vee \neg L$, то $I \models D_1$ и $I \models D_2$ влечет $I \models D_1' \vee D_2'$. Значит, добавление дизъюнкта $D_0 = D_1' \vee D_2'$ к S не нарушает ее выполнимости. Зато устраняется потенциальное противоречие L и $\neg L$

Правило вывода, разрешающее противоречия,

$$\frac{D_1' \vee L,\ D_2' \vee \neg L}{D_1' \vee D_2'}$$

называется правилом резолюции. Это правило можно применять до тех пор, пока не возникнет неустранимое противоречие $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$. Это и будет служить признаком противоречивости системы S

Теорема Эрбрана

Ну, а если $D_1 = P(x)$ и $D_2 = \neg P(f(y))$, то как быть тогда? Ведь здесь нет явного противоречия

Теорема Эрбрана

Ну, а если $D_1 = P(x)$ и $D_2 = \neg P(f(y))$, то как быть тогда? Ведь здесь нет явного противоречия

Противоречие здесь скрытое. Дизъюнкты D_1 и D_2 имеют основные примеры

$$P(f(c)) = D_1\{x/f(c)\} \text{ и } \neg P(f(c)) = D_2\{y/c\},$$

которые образуют противоречие. Значит, D_1 и D_2 тоже противоречивы. Но как отыскать это скрытое противоречие?

Теорема Эрбрана

Ну, а если $D_1 = P(x)$ и $D_2 = \neg P(f(y))$, то как быть тогда? Ведь здесь нет явного противоречия

Противоречие здесь скрытое. Дизъюнкты D_1 и D_2 имеют основные примеры

$$P(f(c)) = D_1\{x/f(c)\} \text{ и } \neg P(f(c)) = D_2\{y/c\},$$

которые образуют противоречие. Значит, D_1 и D_2 тоже противоречивы. Но как отыскать это скрытое противоречие?

Нужно постараться привести литеры $P(x)$ и $P(f(y))$ к общему виду. Приведение выражений к общему виду называется унификацией

Теорема Эрбрана

Ну, а если $D_1 = P(x)$ и $D_2 = \neg P(f(y))$, то как быть тогда? Ведь здесь нет явного противоречия

Противоречие здесь скрытое. Дизъюнкты D_1 и D_2 имеют основные примеры

$$P(f(c)) = D_1\{x/f(c)\} \text{ и } \neg P(f(c)) = D_2\{y/c\},$$

которые образуют противоречие. Значит, D_1 и D_2 тоже противоречивы. Но как отыскать это скрытое противоречие?

Нужно постараться привести литеры $P(x)$ и $P(f(y))$ к общему виду. Приведение выражений к общему виду называется унификацией

Нам нужен алгоритм унификации!

Задача унификации

Приведение двух атомов A' и A'' к общему виду достигается применением такой подстановки θ, для которой $A'\theta = A''\theta$

Значит, для решения задачи унификации придется изучить алгебраические свойства подстановок

Задача унификации

Приведение двух атомов A' и A'' к общему виду достигается применением такой подстановки θ, для которой $A'\theta = A''\theta$

Значит, для решения задачи унификации придется изучить алгебраические свойства подстановок

Воспоминания

Подстановка — это отображение $\theta \ : \ Var \ \to \ Term$

Конечная подстановка $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$

$E\theta$ — применение подстановки θ к выражению E

Задача унификации

Определение

Пусть $\theta, \eta \in Subst$. Композиция подстановок $\theta\eta$ — это подстановка μ, которая определяется следующим соотношением:

$$\mu(x) = (x\theta)\eta \text{ для любой } x \in Var$$

Задача унификации

Определение

Пусть $\theta, \eta \in Subst$. Композиция подстановок $\theta\eta$ — это подстановка μ, которая определяется следующим соотношением:

$$\mu(x) = (x\theta)\eta \text{ для любой } x \in Var$$

Утверждение

Пусть $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$, $\eta = \{y_1/s_1, \dots, y_m/s_m\}$. Тогда подстановка

$$\begin{aligned}\mu \;=\; & \{x_1/t_1\eta, \dots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & \{y_i/s_i \;:\; y_i \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} - \\ & \{x_j/t_j\eta \;:\; x_j = t_j\eta\}\end{aligned}$$

является композицией $\theta\eta$

Задача унификации

Доказательство.

$$
\begin{array}{rcl}
\mu & = & \{x_1/t_1\eta, \ldots, x_n/t_n\eta\} \cup \\
 & & \{y_i/s_i \ : \ y_i \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\} \ - \\
 & & \{x_j/t_j\eta \ : \ x_j = t_j\eta\}
\end{array}
$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта:

Задача унификации

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mu \quad = \quad & \{x_1/t_1\eta, \ldots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & \{y_i/s_i \ : \ y_i \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\} \ - \\ & \{x_j/t_j\eta \ : \ x_j = t_j\eta\}\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта:

1. $z = x_j \in Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (x_j\theta)\eta = t_j\eta$.

Задача унификации

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mu &= \{x_1/t_1\eta, \dots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & \{y_i/s_i \ : \ y_i \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} \ - \\ & \{x_j/t_j\eta \ : \ x_j = t_j\eta\} \end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта:

1. $z = x_j \in Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (x_j\theta)\eta = t_j\eta$.
Если $t_j\eta \neq x_j$, то $x_j \in Dom_\mu$, и $x_j\mu = t_j\eta$.

Задача унификации

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mu &= \{x_1/t_1\eta, \dots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ &\quad \{y_i/s_i \ : \ y_i \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} - \\ &\quad \{x_j/t_j\eta \ : \ x_j = t_j\eta\}\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта:

1. $z = x_j \in Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (x_j\theta)\eta = t_j\eta$.
Если $t_j\eta \neq x_j$, то $x_j \in Dom_\mu$, и $x_j\mu = t_j\eta$.
Если $t_j\eta = x_j$, то $x_j \notin Dom_\mu$, и $x_j\mu = x_j$.

Задача унификации

Доказательство.

$$\begin{array}{rcl} \mu & = & \{x_1/t_1\eta, \ldots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & & \{y_i/s_i \ : \ y_i \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\} \ - \\ & & \{x_j/t_j\eta \ : \ x_j = t_j\eta\} \end{array}$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта:

1. $z = x_j \in Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (x_j\theta)\eta = t_j\eta$.
Если $t_j\eta \neq x_j$, то $x_j \in Dom_\mu$, и $x_j\mu = t_j\eta$.
Если $t_j\eta = x_j$, то $x_j \notin Dom_\mu$, и $x_j\mu = x_j$.
В любом случае $x_i(\theta\eta) = x_i\mu$

2. $z = y_i \in Dom_\eta \setminus Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (y_i\theta)\eta = y_i\eta = s_i$,

Задача унификации

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mu &= \{x_1/t_1\eta, \dots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ &\quad \{y_i/s_i \ : \ y_i \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} \ - \\ &\quad \{x_j/t_j\eta \ : \ x_j = t_j\eta\}\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта:

1. $z = x_j \in Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (x_j\theta)\eta = t_j\eta$.
Если $t_j\eta \neq x_j$, то $x_j \in Dom_\mu$, и $x_j\mu = t_j\eta$.
Если $t_j\eta = x_j$, то $x_j \notin Dom_\mu$, и $x_j\mu = x_j$.
В любом случае $x_i(\theta\eta) = x_i\mu$

2. $z = y_i \in Dom_\eta \setminus Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (y_i\theta)\eta = y_i\eta = s_i$,
и $z\mu = s_i$

Задача унификации

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mu \;=\; & \{x_1/t_1\eta, \ldots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & \{y_i/s_i \;:\; y_i \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\} \;- \\ & \{x_j/t_j\eta \;:\; x_j = t_j\eta\}\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта:

1. $z = x_j \in Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (x_j\theta)\eta = t_j\eta$.
Если $t_j\eta \neq x_j$, то $x_j \in Dom_\mu$, и $x_j\mu = t_j\eta$.
Если $t_j\eta = x_j$, то $x_j \notin Dom_\mu$, и $x_j\mu = x_j$.
В любом случае $x_i(\theta\eta) = x_i\mu$

2. $z = y_i \in Dom_\eta \setminus Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (y_i\theta)\eta = y_i\eta = s_i$,
и $z\mu = s_i$

3. $z = y_i \notin Dom_\eta \cup Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = z$ и $z\mu = z$

<u>**конец доказательства**</u>

Задача унификации

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$

$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$

Задача унификации

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$

$$\theta\eta \quad =$$

Задача унификации

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$

$$\theta\eta \;=\; \{x/f(x,c)\eta,\ y/g(u)\eta,\ z/y\eta\} \cup \{u/c\}$$

Задача унификации

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$

$$\begin{aligned}\theta\eta \quad = \quad & \{x/f(x,c)\eta,\ y/g(u)\eta,\ z/y\eta\} \ \cup\ \{u/c\} \\ & \{x/f(g(y),c),\ y/g(c),\ z/z,\ u/c\}\end{aligned}$$

Задача унификации

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$

$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$

$$\begin{array}{rcl} \theta\eta & = & \{x/f(x,c)\eta,\ y/g(u)\eta,\ z/y\eta\} \cup \{u/c\} \\ & & \{x/f(g(y),c),\ y/g(c),\ z/z,\ u/c\} \\ & & \{x/f(g(y),c),\ y/g(c),\ u/c\} \end{array}$$

Задача унификации

Определения

Пусть E_1 и E_2 — два логических выражения (термы, атомы, формулы и др.)

Подстановка θ называется унификатором выражений E_1 и E_2, если $E_1\theta = E_2\theta$

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором (НОУ) выражений E_1 и E_2, если

1. **θ — унификатор выражений E_1 и E_2**
2. **для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ, для которой верно равенство**
$$\eta = \theta\rho$$

$HOY(E_1, E_2)$ — множество наиболее общих унификаторов выражений E_1 и E_2

Задача унификации

Пример

$E_1 = P(f(x_1), x_2)$
$E_2 = P(y_1, c)$

Задача унификации

Пример

$E_1 = P(f(x_1), x_2)$
$E_2 = P(y_1, c)$

$\eta = \{x_1/f(c),\ x_2/c,\ y_1/f(f(c))\}$ — унификатор E_1 и E_2, т. к.

$$E_1\eta = P(f(f(c)), c) = E_2\eta$$

Задача унификации

Пример

$E_1 = P(f(x_1), x_2)$
$E_2 = P(y_1, c)$

$\eta = \{x_1/f(c),\ x_2/c,\ y_1/f(f(c))\}$ — унификатор E_1 и E_2, т. к.

$$E_1\eta = P(f(f(c)), c) = E_2\eta$$

$\theta = \{x_2/c,\ y_1/f(x_1)\}$ — более общий унификатор E_1 и E_2, т. к.

$$E_1\theta = P(f(x_1), c) = E_2\theta,$$
$$\eta = \theta\{x_1/f(c)\}$$

Задача унификации

Пример

$E_1 = P(f(x_1), x_2)$
$E_2 = P(y_1, c)$

$\eta = \{x_1/f(c),\ x_2/c,\ y_1/f(f(c))\}$ — унификатор E_1 и E_2, т. к.

$$E_1\eta = P(f(f(c)), c) = E_2\eta$$

$\theta = \{x_2/c,\ y_1/f(x_1)\}$ — более общий унификатор E_1 и E_2, т. к.

$$E_1\theta = P(f(x_1), c) = E_2\theta,$$
$$\eta = \theta\{x_1/f(c)\}$$

На самом деле, θ — наиболее общий унификатор E_1 и E_2
Выражения E_1 и E_2 унифицируемы, и $\theta \in НОУ(E_1, E_2)$

Задача унификации

Пример

$E_1 = R(f(x_1), x_1)$

$E_2 = R(y_1, f(y_1))$

Задача унификации

Пример

$E_1 = R(f(x_1), x_1)$
$E_2 = R(y_1, f(y_1))$

Выражения E_1 и E_2 не имеют унификаторов, и $НОУ(E_1, E_2) = \emptyset$

Задача унификации

Задача унификации
состоит в том, чтобы для двух выражений E_1 и E_2 выяснить,
являются ли эти выражения унифицируемыми,
и, в случае их унифицируемости, вычислить
наиболее общий унификатор

Конец лекции 7