

Лекция 5. Слабо положительные и слабо отрицательные КНФ и функции. Критерии слабой положительности и слабой отрицательности функции. Полиномиальность проверки выполнимости слабо положительной и слабо отрицательной КНФ.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

# Операции над наборами

Пусть  $f \in P_2^{(m)}$ ,  $m \geq 1$ , и  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in E_2^n$ ,  $n \geq 1$ .

Рассмотрим применение  $m$ -местной функции  $f$  к  $m$  наборам  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ .

Считаем, что  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \beta \in E_2^n$ , где

$$\beta_i = f(\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{m,i})$$

для всех  $i = 1, \dots, n$ .

**Например**, если  $f(x, y) = x \vee y \in P_2$  и  $\alpha_1 = (0, 1, 0) \in E_2^3$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 0) \in E_2^3$ , то

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 = (0, 1, 0) \vee (1, 1, 0) = (0 \vee 1, 1 \vee 1, 0 \vee 0) = (1, 1, 0) \in E_2^3.$$

Т. е. функция к наборам применяется поразрядно.

# Слабо положительная ЭД

ЭД называется **слабо положительной**, если в нее входит не более одного отрицательного литерала.

Т.е. если  $D$  — слабо положительная ЭД, то либо

$$D = \bar{x}_{i_0} \vee x_{i_1} \vee \dots \vee x_{i_r},$$

где  $i_0, i_1, \dots, i_r$  — различны,  $r \geq 0$ , либо

$$D = x_{i_1} \vee \dots \vee x_{i_r},$$

где  $i_1, \dots, i_r$  — различны,  $r \geq 0$ .

**Например**,  $\bar{x}_1$ ,  $x_1 \vee x_3$ ,  $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4$  — слабо положительные ЭД.

# Слабо положительная КНФ

КНФ называется **слабо положительной**, если она состоит только из слабо положительных ЭД.

**Например**,  $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$  — слабо положительная КНФ.

# Слабо положительная функция

Функция алгебры логики называется **слабо положительной**, если ее можно представить слабо положительной КНФ.

Множество всех слабо положительных функций алгебры логики обозначим  $WP$ .

**Например**,  $x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) \in WP$ .

# Приведенное представление функции из $WP$

Любую слабо положительную КНФ функции  $g \in WP$  назовем **приведенным представлением** этой слабо положительной функции  $g$ .

**Например,**  $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$  — приведенное представление функции  $x_1 \sim x_2 \in WP$ .

# Приведенное представление функции из $WP$

Приведенное представление слабо положительной функции  $g$  не обязательно однозначно.

Например,

$$K_1 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$$

и

$$K_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)$$

два различных приведенных представления функции  $g \in WP$ , где  $\alpha_g = (1010\ 0011)$ .

## Критерий слабой положительности функции

**Теорема 1.** *Функция  $g \in P_2$  является слабо положительной тогда и только тогда, когда для любых  $\alpha, \beta \in N_1(g)$  выполняется  $\alpha \vee \beta \in N_1(g)$ .*



# Критерий слабой положительности функции

**Доказательство. Необходимость.**

Пусть  $g(x_1, \dots, x_n) \in WP$  и  $K$  — ее слабо положительная КНФ. Возьмем произвольные  $\alpha, \beta \in N_1(g)$ . Тогда для каждой ЭД  $D$ , входящей в КНФ  $K$ , верно  $D(\alpha) = 1$  и  $D(\beta) = 1$ .

Рассмотрим произвольную ЭД  $D$  из КНФ  $K$ . Возможны следующие случаи.

# Критерий слабой положительности функции

1. Пусть набор  $\alpha$  обращает в единицу некоторый положительный литерал  $L(x_i) = x_i$  ЭД  $D$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Тогда  $\alpha_i = 1$ , а значит, и  $\alpha_i \vee \beta_i = 1$ :

	1	...	$i-1$	$i$	$i+1$	...	$n$
$\alpha$		...		1		...	
$\beta$		...				...	
$\alpha \vee \beta$		...		1		...	

Получаем, что  $L(\alpha \vee \beta) = 1$  и  $D(\alpha \vee \beta) = 1$ .

Аналогично, если набор  $\beta$  обращает в единицу некоторый положительный литерал ЭД  $D$ .

# Критерий слабой положительности функции

2. Пусть теперь наборы  $\alpha$  и  $\beta$  обнуляют все положительные литералы ЭД  $D$ . Но тогда ЭД  $D$  обязана содержать единственный отрицательный литерал  $L(x_i) = \bar{x}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Кроме того,  $\alpha_i = \beta_i = 0$ , а значит, и  $\alpha_i \vee \beta_i = 0$ :

	1	...	$i-1$	$i$	$i+1$	...	$n$
$\alpha$	...			0			...
$\beta$	...			0			...
$\alpha \vee \beta$	...			0			...

Получаем, что  $L(\alpha \vee \beta) = 1$  и  $D(\alpha \vee \beta) = 1$ .

## Критерий слабой положительности функции

Следовательно, любая ЭД КНФ  $K$  обращается в единицу на наборе  $\alpha \vee \beta$ , т. е.  $K(\alpha \vee \beta) = 1$ .

Это означает, что  $\alpha \vee \beta \in N_1(g)$ .

# Критерий слабой положительности функции

*Достаточность.* Пусть для функции  $g(x_1, \dots, x_n) \in P_2$  для любых  $\alpha, \beta \in N_1(g)$  верно  $\alpha \vee \beta \in N_1(g)$ .

Покажем, что сокращенная КНФ  $K_g$  функции  $g$  является слабо положительной, т. е. что каждая простая имплицента  $D$  функции  $g$  является слабо положительной.

# Критерий слабой положительности функции

Докажем от обратного: пусть ЭД  $D$  является простой имплицентай функции  $g$ , но содержит по меньшей мере два отрицательных литерала. Не ограничивая общности рассуждений, пусть

$$D = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r},$$

где  $\sigma_3, \dots, \sigma_r \in E_2$ ,  $r \geq 2$ .

# Критерий слабой положительности функции

Итак,

$$D = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты имплиценты для литерала  $L_1 = \bar{x}_1$  найдется такой набор  $\alpha \in E_2^n$ , что

$$g(\alpha) = 1, L_1(\alpha) = 1, D_1(\alpha) = 0,$$

где  $D_1 = \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}$ .

Значит,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_i = \bar{\sigma}_i$  при всех  $i = 3, \dots, r$ .

# Критерий слабой положительности функции

Итак,

$$D = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты имплиценты для литерала  $L_2 = \bar{x}_2$  найдется такой набор  $\beta \in E_2^n$ , что

$$g(\beta) = 1, L_2(\beta) = 1, D_2(\beta) = 0,$$

где  $D_2 = \bar{x}_1 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}$ .

Значит,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_i = \bar{\sigma}_i$  при всех  $i = 3, \dots, r$ .



# Критерий слабой положительности функции

Итак,

$$D = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

Получаем, что  $\alpha_1 \vee \beta_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \vee \beta_2 = 1$  и  $\alpha_i \vee \beta_i = \bar{\sigma}_i$  при всех  $i = 3, \dots, r$ :

	1	2	3	...	r	r+1	...	n
$\alpha$	0	1	$\bar{\sigma}_3$	...	$\bar{\sigma}_r$			...
$\beta$	1	0	$\bar{\sigma}_3$	...	$\bar{\sigma}_r$			...
$\alpha \vee \beta$	1	1	$\bar{\sigma}_3$	...	$\bar{\sigma}_r$			...

Значит,  $D(\alpha \vee \beta) = 0$ , из чего следует  $g(\alpha \vee \beta) = 0$ . Но это означает, что  $\alpha \vee \beta \notin N_1(g)$ , чего не может быть.

## Критерий слабой положительности функции

Следовательно, каждая простая имплицента функции  $g$  является слабо положительной.



## Сокращенная КНФ слабо положительной функции

При доказательстве теоремы 1 показано, что сокращенная КНФ слабо положительной функции является ее приведенным представлением.

# Проверка слабой положительности функции

**Пример.** По критерию из теоремы 1 покажем слабую положительность функции  $g \in P_2$ , где  $\alpha_g = (1010\ 0011)$ .

Получаем:

$$N_1(g) = \{\alpha_1 = (0, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 0), \alpha_4 = (1, 1, 1)\}.$$

Проверяем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vee \alpha_2 &= (0, 1, 0), & \alpha_1 \vee \alpha_3 &= (1, 1, 0), \\ \alpha_1 \vee \alpha_4 &= (1, 1, 1), & \alpha_2 \vee \alpha_3 &= (1, 1, 0), \\ \alpha_2 \vee \alpha_4 &= (1, 1, 1), & \alpha_3 \vee \alpha_4 &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Значит,  $g \in WP$ .

## Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

Опишем алгоритм проверки выполнимости слабо положительной КНФ.

# Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

**Алгоритм 5.** Проверка выполнимости слабо положительной КНФ.

*Вход:* слабо положительная КНФ  $K$  функции  $g \in WP \cap P_2^{(n)}$ .

*Выход:* «да» и такой набор  $\alpha \in E_2^n$ , что  $g(\alpha) = 1$ , если  $g \neq 0$ , и «нет», если  $g = 0$ .

# Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

## Алгоритм 5.

1.  $K_0 := K$ ,  $\alpha_0 := (1, \dots, 1) \in E_2^n$ .

2.  $i, i = 1, \dots, n$ .

1) Если в  $K_0$  любая ЭД содержит хотя бы один положительный литерал, то ответ «да» и  $\alpha := \alpha_0$ .

2) Если в  $K_0$  найдется ЭД  $D$ , не содержащая положительных литералов, т. е.  $D = \bar{x}_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , то получаем  $K_0$ , заменяя в  $K_0$  переменную  $x_j$  на 0 и выполняя упрощения в каждой ЭД, и  $\alpha_0(j) := 0$ .

3) Если в  $K_0$  найдется ЭД  $D$ , равная 0, то ответ «нет».

3. Ответ «да» и  $\alpha := \alpha_0$ .

## Правильность и сложность алгоритма

Правильность алгоритма 5 вытекает из следующих наблюдений:

1) любая ЭД, **содержащая** хотя бы один положительный литерал  $L(x) = x$ , обращается в единицу на любом наборе, в котором переменная  $x$  равна единице;

2) Если ЭД **является** отрицательным литералом  $L(x) = \bar{x}$ , то она обращается в единицу только на тех наборах, в которых переменная  $x$  равна нулю.

Отметим, что алгоритм 5 является **полиномиальным**.



# Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

**Пример.** Проверим по алгоритму 5, является ли КНФ  $K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$  выполнимой:

1.  $K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$ ,  $\alpha_0 = (1, 1, 1) \in E_2^3$ .

2.1.

1) Ответ «да» и  $\alpha = (1, 1, 1)$ .

# Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

**Пример.** Проверим по алгоритму 5, является ли КНФ  $K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2)(\bar{x}_3)$  выполнимой:

1.  $K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2)(\bar{x}_3)$ ,  $\alpha_0 = (1, 1, 1) \in E_2^3$ .

2.1. 1) ;

2)  $x_j = x_2$ ,  $K_0 = (\bar{x}_1)(\bar{x}_3)$ ,  $\alpha_0 = (1, 0, 1)$ ; 3) .

2.2. 1) ;

2)  $x_j = x_1$ ,  $K_0 = (\bar{x}_3)$ ,  $\alpha_0 = (0, 0, 1)$ ; 3) .

2.3. 1) ;

2)  $x_j = x_3$ ,  $K_0 = 1$ ,  $\alpha_0 = (0, 0, 0)$ ; 3) .

3. Ответ «да» и  $\alpha = (0, 0, 0)$ .

# Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

**Пример.** Проверим по алгоритму 5, является ли КНФ  $K = (x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3)$  выполнимой:

1.  $K_0 = (x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3)$ ,  $\alpha_0 = (1, 1, 1) \in E_2^3$ .

2.1. 1) ;

2)  $x_j = x_3$ ,  $K_0 = (x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2)$ ,  $\alpha_0 = (1, 1, 0)$ ; 3) .

2.2. 1) ;

2)  $x_j = x_2$ ,  $K_0 = (x_1)(\bar{x}_1)$ ,  $\alpha_0 = (1, 0, 0)$ ; 3) .

2.3. 1) ;

2)  $x_j = x_1$ ,  $K_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = (0, 0, 0)$ ; 3) Ответ «нет».

# Слабо отрицательная ЭД

ЭД называется **слабо отрицательной**, если в нее входит не более одного положительного литерала.

Т.е. если  $D$  — слабо отрицательная ЭД, то либо

$$D = x_{i_0} \vee \bar{x}_{i_1} \vee \dots \vee \bar{x}_{i_r},$$

где  $i_0, i_1, \dots, i_r$  — различны,  $r \geq 0$ , либо

$$D = \bar{x}_{i_1} \vee \dots \vee \bar{x}_{i_r},$$

где  $i_1, \dots, i_r$  — различны,  $r \geq 0$ .

**Например**,  $\bar{x}_1, x_1 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4$  — слабо отрицательные ЭД.

# Слабо отрицательная КНФ

КНФ называется **слабо отрицательной**, если она состоит только из слабо отрицательных ЭД.

**Например,**  $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$  — слабо отрицательная КНФ.

## Слабо отрицательная функция

Функция алгебры логики называется **слабо отрицательной**, если ее можно представить слабо отрицательной КНФ.

Множество всех слабо отрицательных функций алгебры логики обозначим  $WN$ .

**Например**,  $x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) \in WN$ .

## Приведенное представление функции из $WN$

Любую слабо отрицательную КНФ функции  $g \in WN$  назовем **приведенным представлением** этой слабо отрицательной функции  $g$ .

**Например**,  $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$  — приведенное представление функции  $x_1 \sim x_2 \in WN$ .

Приведенное представление слабо отрицательной функции  $g$  не **обязательно** однозначно.

## Критерий слабой отрицательности функции

**Теорема 2.** Функция  $g \in P_2$  является слабо отрицательной тогда и только тогда, когда для любых  $\alpha, \beta \in N_1(g)$  выполняется  $\alpha \cdot \beta \in N_1(g)$ .



# Проверка слабой отрицательности функции

**Пример.** По критерию из теоремы 2 покажем слабую отрицательность функции  $g \in P_2$ , где  $\alpha_g = (1010\ 0011)$ .

Получаем:

$$N_1(g) = \{\alpha_1 = (0, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 0), \alpha_4 = (1, 1, 1)\}.$$

Проверяем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= (0, 0, 0), & \alpha_1 \cdot \alpha_3 &= (0, 0, 0), \\ \alpha_1 \cdot \alpha_4 &= (0, 0, 0), & \alpha_2 \cdot \alpha_3 &= (0, 1, 0), \\ \alpha_2 \cdot \alpha_4 &= (0, 1, 0), & \alpha_3 \cdot \alpha_4 &= (1, 1, 0). \end{aligned}$$

Значит,  $g \in WN$ .

## Проверка выполнимости слабо отрицательной КНФ

Опишем алгоритм проверки выполнимости слабо отрицательной КНФ.

# Проверка выполнимости слабо отрицательной КНФ

**Алгоритм 6.** Проверка выполнимости слабо отрицательной КНФ.

*Вход:* слабо отрицательная КНФ  $K$  функции  $g \in WN \cap P_2^{(n)}$ .

*Выход:* «да» и такой набор  $\alpha \in E_2^n$ , что  $g(\alpha) = 1$ , если  $g \neq 0$ , и «нет», если  $g = 0$ .

# Проверка выполнимости слабо отрицательной КНФ

## Алгоритм 6.

1.  $K_0 := K$ ,  $\alpha_0 := (0, \dots, 0) \in E_2^n$ .

2.  $i, i = 1, \dots, n$ .

1) Если в  $K_0$  любая ЭД содержит хотя бы один отрицательный литерал, то ответ «да» и  $\alpha := \alpha_0$ .

2) Если в  $K_0$  найдется ЭД  $D$ , не содержащая отрицательных литералов, т. е.  $D = x_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , то получаем  $K_0$ , заменяя в  $K_0$  переменную  $x_j$  на 1 и выполняя упрощения в каждой ЭД, и  $\alpha_0(j) := 1$ .

3) Если в  $K_0$  найдется ЭД  $D$ , равная 0, то ответ «нет».

3. Ответ «да» и  $\alpha := \alpha_0$ .

# Полиномиальность $S$ -ВЫП при $S \subseteq WP$ или $S \subseteq WN$

**Теорема 3.** Пусть  $S \subseteq P_2$  и  $S$  — конечно.

1. Если  $S \subseteq WP$ , то  $S$ -ВЫП  $\in P$ .
2. Если  $S \subseteq WN$ , то  $S$ -ВЫП  $\in P$ .

Конец лекции