Лекция 5. Слабо положительные и слабо отрицательные КНФ и функции. Критерии слабой положительности и слабой отрицательности функции. Полиномиальность проверки выполнимости слабо положительной и слабо отрицательной КНФ.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Операции над наборами

Пусть $f \in P_2^{(m)}$, $m \geqslant 1$, и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in E_2^n$, $n \geqslant 1$.

Рассмотрим применение m-местной функции f к m наборам $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Считаем, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \beta \in E_2^n$, где

$$\beta_i = f(\alpha_{1,i}, \ldots, \alpha_{m,i})$$

для всх $i = 1, \ldots, n$.

Например, если $f(x, y) = x \vee y \in P_2$ и $\alpha_1 = (0, 1, 0) \in E_2^3$, $\alpha_2 = (1, 1, 0) \in E_2^3$, то

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 = (0, 1, 0) \vee (1, 1, 0) = (0 \vee 1, 1 \vee 1, 0 \vee 0) = (1, 1, 0) \in E_2^3.$$

Т. е. функция к наборам применяется поразрядно.

Слабо положительная ЭД

ЭД называется **слабо положительной**, если в нее входит не более одного отрицательного литерала.

Т. е. если D — **слабо положительная** ЭД, то либо

$$D = \bar{x}_{i_0} \vee x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_r},$$

где $i_0, i_1, \ldots, i_r$ — различны, $r \geqslant 0$, либо

$$D = x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_r},$$

где $i_1, \ldots, i_r$ — различны, $r \geqslant 0$.

Например, $\bar{x}_1$, $x_1 \vee x_3$, $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4$ — слабо положительные ЭД.

Слабо положительная КНФ

КНФ называется **слабо положительной**, если она состоит только из слабо положительных ЭД.

Например, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$ — слабо положительная КНФ.

Слабо положительная функция

Функция алгебры логики называется **слабо положительной**, если ее можно представить слабо положительной КНФ.

Множество всех слабо положительных функций алгебры логики обозначим WP.

Например, $x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) \in WP$.

Приведенное представление функции из WP

Любую слабо положительную КНФ функции $g \in WP$ назовем **приведенным представлением** этой слабо положительной функции g.

Например, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$ — приведенное представление функции $x_1 \sim x_2 \in WP$.

Приведенное представление функции из WP

Приведенное представление слабо положительной функции g **не обязательно** однозначно.

Например,

$$K_1 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$$

и

$$K_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)$$

два различных приведенных представления функции $g \in WP$, где $\alpha_g = (1010\ 0011)$.

Критерий слабой положительности функции

Теорема 1. *Функция $g \in P_2$ является слабо положительной тогда и только тогда, когда для любых $\alpha, \beta \in N_1(g)$ выполняется $\alpha \vee \beta \in N_1(g)$.*

Критерий слабой положительности функции

Доказательство. *Необходимость.*
Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) \in WP$ и K — ее слабо положительная КНФ. Возьмем произвольные $\alpha, \beta \in N_1(g)$. Тогда для каждой ЭД D, входящей в КНФ K, верно $D(\alpha) = 1$ и $D(\beta) = 1$.

Рассмотрим произвольную ЭД D из КНФ K. Возможны следующие случаи.

Критерий слабой положительности функции

1. Пусть набор α обращает в единицу некоторый положительный литерал $L(x_i) = x_i$ ЭД D, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\alpha_i = 1$, а значит, и $\alpha_i \vee \beta_i = 1$:

	1	…	$i-1$	i	$i+1$	…	n
α		…		1		…	
β		…				…	
$\alpha \vee \beta$		…		1		…	

Получаем, что $L(\alpha \vee \beta) = 1$ и $D(\alpha \vee \beta) = 1$.

Аналогично, если набор β обращает в единицу некоторый положительный литерал ЭД D.

Критерий слабой положительности функции

2. Пусть теперь наборы α и β обнуляют все положительные литералы ЭД D. Но тогда ЭД D обязана содержать единственный отрицательный литерал $L(x_i) = \bar{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Кроме того, $\alpha_i = \beta_i = 0$, а значит, и $\alpha_i \vee \beta_i = 0$:

	1	$\dots$	$i-1$	i	$i+1$	$\dots$	n
α		$\dots$		0		$\dots$	
β		$\dots$		0		$\dots$	
$\alpha \vee \beta$		$\dots$		0		$\dots$	

Получаем, что $L(\alpha \vee \beta) = 1$ и $D(\alpha \vee \beta) = 1$.

Критерий слабой положительности функции

Следовательно, любая ЭД КНФ K обращается в единицу на наборе $\alpha \vee \beta$, т. е. $K(\alpha \vee \beta) = 1$.

Это означает, что $\alpha \vee \beta \in N_1(g)$.

Критерий слабой положительности функции

Достаточность. Пусть для функции $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ для любых $\alpha, \beta \in N_1(g)$ верно $\alpha \vee \beta \in N_1(g)$.
Покажем, что сокращенная КНФ K_g функции g является слабо положительной, т. е. что каждая простая имплицента D функции g является слабо положительной.

Критерий слабой положительности функции

Докажем от обратного: пусть ЭД D является простой импликентой функции g, но содержит по меньшей мере два отрицательных литерала. Не ограничивая общности рассуждений, пусть

$$D = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r},$$

где $\sigma_3, \ldots, \sigma_r \in E_2$, $r \geqslant 2$.

Критерий слабой положительности функции

Итак,

$$D = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты импликенты для литерала $L_1 = \bar{x}_1$ найдется такой набор $\alpha \in E_2^n$, что

$$g(\alpha) = 1,\ L_1(\alpha) = 1,\ D_1(\alpha) = 0,$$

где $D_1 = \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}$.

Значит, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_i = \bar{\sigma}_i$ при всех $i = 3, \ldots, r$.

Критерий слабой положительности функции

Итак,

$$D = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты импликанты для литерала $L_2 = \bar{x}_2$ найдется такой набор $\beta \in E_2^n$, что

$$g(\beta) = 1,\ \ L_2(\beta) = 1,\ \ D_2(\beta) = 0,$$

где $D_2 = \bar{x}_1 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}$.

Значит, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_i = \bar{\sigma}_i$ при всех $i = 3, \ldots, r$.

Критерий слабой положительности функции

Итак,

$$D = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

Получаем, что $\alpha_1 \vee \beta_1 = 1$, $\alpha_2 \vee \beta_2 = 1$ и $\alpha_i \vee \beta_i = \bar{\sigma}_i$ при всех $i = 3, \ldots, r$:

	1	2	3	$\ldots$	r	$r+1$	$\ldots$	n
α	0	1	$\bar{\sigma}_3$	$\ldots$	$\bar{\sigma}_r$		$\ldots$	
β	1	0	$\bar{\sigma}_3$	$\ldots$	$\bar{\sigma}_r$		$\ldots$	
$\alpha \vee \beta$	1	1	$\bar{\sigma}_3$	$\ldots$	$\bar{\sigma}_r$		$\ldots$	

Значит, $D(\alpha \vee \beta) = 0$, из чего следует $g(\alpha \vee \beta) = 0$. Но это означает, что $\alpha \vee \beta \notin N_1(g)$, чего не может быть.

Критерий слабой положительности функции

Следовательно, каждая простая импликанта функции g является слабо положительной.

$\square$

Сокращенная КНФ слабо положительной функции

При доказательстве теоремы 1 показано, что сокращенная КНФ слабо положительной функции является ее приведенным представлением.

Проверка слабой положительности функции

Пример. По критерию из теоремы 1 покажем слабую положительность функции $g \in P_2$, где $\alpha_g = (1010\ 0011)$.

Получаем:

$$N_1(g) = \{\alpha_1 = (0,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (1,1,0), \alpha_4 = (1,1,1)\}.$$

Проверяем:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 \vee \alpha_2 = (0,1,0), & \alpha_1 \vee \alpha_3 = (1,1,0), \\ \alpha_1 \vee \alpha_4 = (1,1,1), & \alpha_2 \vee \alpha_3 = (1,1,0), \\ \alpha_2 \vee \alpha_4 = (1,1,1), & \alpha_3 \vee \alpha_4 = (1,1,1). \end{array}$$

Значит, $g \in WP$.

Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

Опишем алгоритм проверки выполнимости слабо положительной КНФ.

Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

Алгоритм 5. *Проверка выполнимости слабо положительной КНФ*.

Вход: слабо положительная КНФ K функции $g \in WP \cap P_2^{(n)}$.

Выход: «да» и такой набор $\alpha \in E_2^n$, что $g(\alpha) = 1$, если $g \neq 0$, и «нет», если $g = 0$.

Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

Алгоритм 5.

1. $K_0 := K$, $\alpha_0 := (1, \ldots, 1) \in E_2^n$.

2.i, $i = 1, \ldots, n$.

1) Если в K_0 любая ЭД содержит хотя бы один положительный литерал, то ответ **«да»** и $\alpha := \alpha_0$.

2) Если в K_0 найдется ЭД D, не содержащая положительных литералов, т. е. $D = \bar{x}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то получаем K_0, заменяя в K_0 переменную x_j на 0 и выполняя упрощения в каждой ЭД, и $\alpha_0(j) := 0$.

3) Если в K_0 найдется ЭД D, равная 0, то ответ **«нет»**.

3. Ответ **«да»** и $\alpha := \alpha_0$.

Сложность алгоритма 5

Правильность алгоритма 5 вытекает из следующих наблюдений:

1) любая ЭД, **содержащая** хотя бы один положительный литерал $L(x) = x$, обращается в единицу на любом наборе, в котором переменная x равна единице;

2) Если ЭД **является** отрицательным литералом $L(x) = \bar{x}$, то она обращается в единицу только на тех наборах, в которых переменная x равна нулю.

Отметим, что алгоритм 5 является **полиномиальным**.

Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

Пример. Проверим по алгоритму 5, является ли КНФ $K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$ выполнимой:

1. $K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$, $\alpha_0 = (1, 1, 1) \in E_2^3$.

2.1.

1) Ответ **«да»** и $\alpha = (1, 1, 1)$.

Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

Пример. Проверим по алгоритму 5, является ли КНФ $K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2)(\bar{x}_3)$ выполнимой:

1. $K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2)(\bar{x}_3)$, $\alpha_0 = (1,1,1) \in E_2^3$.

2.1. 1) ;

2) $x_j = x_2$, $K_0 = (\bar{x}_1)(\bar{x}_3)$, $\alpha_0 = (1,0,1)$; 3) .

2.2. 1) ;

2) $x_j = x_1$, $K_0 = (\bar{x}_3)$, $\alpha_0 = (0,0,1)$; 3) .

2.3. 1) ;

2) $x_j = x_3$, $K_0 = 1$, $\alpha_0 = (0,0,0)$; 3) .

3. Ответ **«да»** и $\alpha = (0,0,0)$.

Проверка выполнимости слабо положительной КНФ

Пример. Проверим по алгоритму 5, является ли КНФ $K = (x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3)$ выполнимой:

1. $K_0 = (x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3)$, $\alpha_0 = (1, 1, 1) \in E_2^3$.

2.1. 1) ;

2) $x_j = x_3$, $K_0 = (x_1)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2)$, $\alpha_0 = (1, 1, 0)$; 3) .

2.2. 1) ;

2) $x_j = x_2$, $K_0 = (x_1)(\bar{x}_1)$, $\alpha_0 = (1, 0, 0)$; 3) .

2.3. 1) ;

2) $x_j = x_1$, $K_0 = 0$, $\alpha_0 = (0, 0, 0)$; 3) Ответ **«нет»**.

Слабо отрицательная ЭД

ЭД называется **слабо отрицательной**, если в нее входит не более одного положительного литерала.

Т. е. если D — **слабо отрицательная** ЭД, то либо

$$D = x_{i_0} \vee \bar{x}_{i_1} \vee \ldots \vee \bar{x}_{i_r},$$

где $i_0, i_1, \ldots, i_r$ — различны, $r \geqslant 0$, либо

$$D = \bar{x}_{i_1} \vee \ldots \vee \bar{x}_{i_r},$$

где $i_1, \ldots, i_r$ — различны, $r \geqslant 0$.

Например, $\bar{x}_1$, $x_1 \vee \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4$ — слабо отрицательные ЭД.

Слабо отрицательная КНФ

КНФ называется **слабо отрицательной**, если она состоит только из слабо отрицательных ЭД.

Например, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$ — слабо отрицательная КНФ.

Слабо отрицательная функция

Функция алгебры логики называется **слабо отрицательной**, если ее можно представить слабо отрицательной КНФ.

Множество всех слабо отрицательных функций алгебры логики обозначим WN.

Например, $x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) \in WN$.

Приведенное представление функции из WN

Любую слабо отрицательную КНФ функции $g \in WN$ назовем **приведенным представлением** этой слабо отрицательной функции g.

Например, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$ — приведенное представление функции $x_1 \sim x_2 \in WN$.

Приведенное представление слабо отрицательной функции g **не обязательно** однозначно.

Критерий слабой отрицательности функции

Теорема 2. *Функция* $g \in P_2$ *является слабо отрицательной тогда и только тогда, когда для любых* $\alpha, \beta \in N_1(g)$ *выполняется* $\alpha \cdot \beta \in N_1(g)$.

Проверка слабой отрицательности функции

Пример. По критерию из теоремы 2 покажем слабую отрицательность функции $g \in P_2$, где $\alpha_g = (1010\ 0011)$.

Получаем:

$$N_1(g) = \{\alpha_1 = (0,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (1,1,0), \alpha_4 = (1,1,1)\}.$$

Проверяем:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 \cdot \alpha_2 = (0,0,0), & \alpha_1 \cdot \alpha_3 = (0,0,0), \\ \alpha_1 \cdot \alpha_4 = (0,0,0), & \alpha_2 \cdot \alpha_3 = (0,1,0), \\ \alpha_2 \cdot \alpha_4 = (0,1,0), & \alpha_3 \cdot \alpha_4 = (1,1,0). \end{array}$$

Значит, $g \in WN$.

Проверка выполнимости слабо отрицательной КНФ

Опишем алгоритм проверки выполнимости слабо отрицательной КНФ.

Проверка выполнимости слабо отрицательной КНФ

Алгоритм 6. *Проверка выполнимости слабо отрицательной КНФ*.

Вход: слабо отрицательная КНФ K функции $g \in WN \cap P_2^{(n)}$.

Выход: «да» и такой набор $\alpha \in E_2^n$, что $g(\alpha) = 1$, если $g \neq 0$, и «нет», если $g = 0$.

Проверка выполнимости слабо отрицательной КНФ

Алгоритм 6.

1. $K_0 := K$, $\alpha_0 := (0, \dots, 0) \in E_2^n$.

2.i, $i = 1, \dots, n$.

1) Если в K_0 любая ЭД содержит хотя бы один отрицательный литерал, то ответ **«да»** и $\alpha := \alpha_0$.

2) Если в K_0 найдется ЭД D, не содержащая отрицательных литералов, т. е. $D = x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то получаем K_0, заменяя в K_0 переменную x_j на 1 и выполняя упрощения в каждой ЭД, и $\alpha_0(j) := 1$.

3) Если в K_0 найдется ЭД D, равная 0, то ответ **«нет»**.

3. Ответ **«да»** и $\alpha := \alpha_0$.

Полиномиальногсть S-ВЫП при $S \subseteq WP$ или $S \subseteq WN$

Теорема 3. *Пусть $S \subseteq P_2$ и S — конечно.*

1. *Если $S \subseteq WP$, то S-ВЫП $\in P$.*
2. *Если $S \subseteq WN$, то S-ВЫП $\in P$.*

Конец лекции