Основы кибернетики

Автор: С. А. Ложкин

Лектор: доцент Д. С. Романов

Часть 4. Надежность и контроль управляющих систем

§ 1. Самокорректирующиеся контактные схемы и методы их постороения. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем, корректирующих один обрыв (одно замыкание)

Рассмотрим вопрос повышения надежности схем на примере т. н. самокорректирующихся КС. Будем считать, что контакты рассматриваемых КС могут выходить из строя, переходя в одно из двух возможных неисправных состояний: состояние *обрыва*, когда контакт не проводит, и состояние *замыкания*, когда контакт проводит при любых значениях управляющей им БП.

Будем говорить, что КС Σ является (p,q)-*самокорректирующейся* КС или, иначе, корректирует p обрывов и q замыканий, где $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$, если любая КС Σ', которая может быть получена из КС Σ в результате обрыва не более чем p контактов и замыкания не более чем q контактов, эквивалентна Σ. Обозначим через $\mathcal{U}^K_{(p,q)}$ множество всех (p,q)-самокорректирующхся КС и заметим, что $\mathcal{U}^K_{(0,0)} = \mathcal{U}^K$. Заметим, также, что для любой КС Σ КС $\Sigma^{(p,q)}$, получающаяся из Σ в результате замены любого ее контакта вида x_i^σ π-схемой, состоящей из $(q+1)$ последовательно соединенного пучка, каждый из которых, включает в себя $(p+1)$ параллельно соединенный контакт вида x_i^σ, принадлежит $\mathcal{U}^K_{(p,q)}$.

Построение КС $\Sigma^{(p,q)}$, основанное на последовательном и/или параллельном дублировании контактов КС Σ, является простейшим способом получения самокорректирующихся КС, эквивалентных заданной КС. Он дает следующую тривиальную верхнюю оценку сложности самокорректирующихся КС, эквивалентных данной.

Лемма 1.1

Для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС Σ', $\Sigma' \in \mathcal{U}^{K}_{(p,q)}$, для которой

$$L(\Sigma') \leqslant (p+1)(q+1)L(\Sigma).$$

Рассмотрим, далее, нетривильный способ построения $(1,0)$- или $(0,1)$-самокорректирующихся КС, связанный с коррекцией одного обрыва или одного замыкания в т. н. однородных подсхемах. Будем называть *однородной* любую связную КС с неразделенными полюсами, состоящую из контактов одного и того же типа. Заметим, что в любой такой КС, состоящей из контактов вида x_i^σ, ФАЛ проводимости между любыми двумя полюсами равна x_i^σ. Отсюда следует, в частности, что любые две однородные КС, состоящие из контактов одного типа и имеющие один и тот же набор полюсов, эквивалентны.

Обозначим через $C_m(x_i^\sigma)$ $(Z_m(x_i^\sigma))$ m-полюсную однородную КС, которая состоит из m контактов вида x_i^σ и представляет собой цикл, проходящий через все полюса (соответственно звезду из контактов, соединяющих ее центр с полюсами). Очевидно, что $C_m(x_i^\sigma) \in \mathcal{U}^K_{(1,0)}$ и $Z_m(x_i^\sigma) \in \mathcal{U}^K_{(0,1)}$.

Представление КС Σ в виде объединения ее однородных подсхем без общих контактов будем называть *однородным разбиением* КС Σ, а минимальное число подсхем в таких разбиениях будем обозначать через $\zeta(\Sigma)$. Если $\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_\zeta$ — однородное разбиение КС Σ, а эквивалентная ей КС Σ' (КС Σ'') получается из КС Σ в результате замены каждой подсхемы Σ_i эквивалентной ей КС Σ_i' вида C_m (соответственно КС Σ_i'' вида Z_m), то $\Sigma' \in \mathcal{U}^K_{(1,0)}$ (соответственно $\Sigma'' \in \mathcal{U}^K_{(0,1)}$). Заметим, что при этом

$$L(\Sigma_i') \leqslant L(\Sigma_i) + 1,\ L(\Sigma_i'') \leqslant L(\Sigma_i) + 1$$

и, следовательно,

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta,\ L(\Sigma'') \leqslant L(\Sigma) + \zeta$$

Указанный нетривиальный способ построения $(0,1)$- или $(1,0)$-самокорректирующихся КС, эквивалентных заданной, дает следующую оценку их сложности.

Лемма 1.2

Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей $(1,0)$- и $(0,1)$-самокорректирующиеся КС Σ' и Σ'' соответственно такие, что

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma), \;\; L(\Sigma'') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma). \tag{1.1}$$

Этот способ позволяет установить асимптотику функции Шеннона для сложности КС из $\mathcal{U}^K_{(0,1)}$ и $\mathcal{U}^K_{(1,0)}$.
Для ФАЛ f и $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ определим ее (p,q)-самокорректирующуюся контактную сложность $L^K_{(p,q)}(f)$ как минимальную сложность КС Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^K_{(p,q)}$, реализующей f, а затем введем соответствующую функцию Шеннона

$$L^K_{(p,q)}(n) = \max_{f \in P_2(n)} L^K_{(p,q)}(f).$$

Очевидно, что

$$L^K(f) \leqslant L^K_{(p,q)}(f) \quad L^K(n) \leqslant L^K_{(p,q)}(n) \tag{1.2}$$

так как $\mathcal{U}^K_{(p,q)} \subseteq \mathcal{U}^K$.

Теорема 1.1

Для $n = 1, 2, \ldots$ *имеют место следующие асимптотические равенства*

$$L^{K}_{(1,0)}(n) \sim L^{K}_{(0,1)}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство.

Требуемые нижние оценки для функций Шеннона $L^K_{(1,0)}(n)$ и $L^K_{(0,1)}(n)$ вытекают из (1.2) и мощностных нижних оценок функции Шеннона $L^K(n)$ из теоремы 4.1 части 3.
Для получения соответствующих верхних оценок возьмем произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим для нее КС Σ_f по теореме 6.1 главы 3. Из замечания к этой теореме вытекает, что при указанных там значениях параметров

$$\zeta(\Sigma_f) = o\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

и поэтому, в соответствии с леммой 1.2 и (1.1), существуют КС $\Sigma'_f \in \mathfrak{U}^K_{(1,0)}$ и КС $\Sigma''_f \in \mathfrak{U}^K_{(0,1)}$, которые реализуют ФАЛ f со сложностью, асимптотически не превосходящей $\frac{2^n}{n}$.
Теорема доказана. $\square$

Для построения нетривиальных КС, корректирующих более одного обрыва или замыкания, можно использовать следующую конструкцию. Пусть КС Σ_i, $i = 1, \ldots, r$, реализует ФАЛ f и корректирует t_i обрывов (замыканий), тогда КС Σ, которая получается в результате параллельного (последовательного) соединения $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, реализует ФАЛ f с коррекцией $t_1 + \ldots + t_r + r - 1$ обрывов (замыканий).

Интересный пример нетривиальной самокоррекции КС даёт контактная схема, реализующая ФАЛ ℓ_n и корректирующая один обрыв, которая получается из схемы Кардо добавлением 4 дополнительных контактов, проведенных следующим образом: для каждого σ, $\sigma \in B$, из входа (выхода) этой схемы, проведем контакт вида x_n^{σ} (соответственно x_1^{σ}) в вершину, соединенную контактом вида $x_n^{\bar{\sigma}}$ (соответственно $x_1^{\bar{\sigma}}$) с ее выходом (соответственно входом). Указанная схема является минимальной в силу леммы 1.4 главы 3 и, следовательно, справедливо утверждение.

Лемма 1.3

Для $n = 2, 3, \ldots$ имеют место равенства

$$L^{\text{К}}_{(1,0)}(\ell_n) = L^{\text{К}}_{(1,0)}(\bar{\ell}_n) = 4n.$$

§ 2. Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста

Для управляющей системы (схемы) без памяти, функционирование которой описывается дискретной функцией или, в общем случае, вектор-функцией, может быть сформулирована следующая модель, в рамках которой обычно рассматриваются вопросы ее надежности и контроля.

Предполагается, что имеется некоторый «внешний» источник неисправностей (источник помех) И, под действием которого рассматриваемая схема Σ может переходить в одно из своих «неисправных состояний» (схем), определяемых этим источником. Пусть схеме $\Sigma = \Sigma_1$, реализующей функцию $f = f_1$ от входных переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и источнику неисправностей И соответствуют «неисправные» состояния (схемы) $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$, где схема Σ_i, $i = 2, \ldots, s$, реализует функцию f_i от переменных x. При этом все состояния (как исправное $\Sigma = \Sigma_1$, так и неисправные $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$) разбиваются на классы (функционально) неотличимых состояний, то есть классы эквивалентности по отношению равенства реализуемых функций, и рассматриваются далее с точностью до неотличимости.

В дальнейшем, говоря о ненадежной схеме Σ, будем иметь в виду пару $(\Sigma, \text{И})$ и (или) соответствующее ей множество схем вместе с теми функциями, которые они реализуют. Для простоты рассмотрения будем считать, что все переменные и функции являются булевскими, хотя многие излагаемые далее результаты без существенных изменений переносятся на случай многозначных функций, случай вектор-функций и другие более общие случаи.

Пусть $(\Sigma, \text{И})$ — указанная выше модель ненадежной схемы Σ с возможными состояниями $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$, в которых реализуются ФАЛ $f = f_1, f_2, \ldots, f_s$ соответственно от БП $X(n)$, определенные на множестве наборов $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subseteq B^n$. Рассмотрим матрицу M, $M \in B^{p,s}$, где

$$M\langle i, j\rangle = f_j(\alpha_i),$$

считая, что i-й строке (j-му столбцу) этой таблицы соответствует набор α_i (соответственно функция f_j и состояние Σ_j).

Матрица, состоящая из различных столбцов (строк) называется *отделимой по столбцам* (соответственно *строкам*) матрицей. Заметим, что каждому классу неотличимых состояний модели $(\Sigma, И)$ соответствует группа одинаковых столбцов матрицы M и рассмотрим отделимую по столбцам матрицу $\widehat{M}$, состоящую из всех различных столбцов матрицы M. При этом будем считать, что каждый столбец матрицы $\widehat{M}$ связан с соответствующим классом неотличимости состояний модели $(\Sigma, И)$, и будем называть $\widehat{M}$ *таблицей контроля* данной модели. Для простоты будем, как правило, предполагать, что все состояния модели $(\Sigma, И)$ попарно отличимы, то есть, $M = \widehat{M}$. Это предположение, очевидно, не ограничивает общности рассуждений.

Пусть, далее, помимо таблицы контроля M для модели $(\Sigma, \text{И})$ задана цель контроля, то есть указано множество $\mathcal{N}$, состоящее из тех неупорядоченных пар различных чисел отрезка $[1, s]$, для которых пары состояний (столбцов матрицы M) с соответствующими номерами необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенные в тех или иных строках данной пары столбцов. В частности, если $\mathcal{N}$ состоит из всех пар указанного вида, то целью контроля является *диагностика схемы*, а если $\mathcal{N} = \{(1,2), \ldots, (1,s)\}$, то — *проверка исправности схемы.* Множество строк матрицы M с номерами из T, $T \subseteq [1, p]$, называется *тестом для матрицы M относительно множества* $\mathcal{N}$, или, иначе, *тестом для* $(M, \mathcal{N})$, если для любой пары (i, j) из $\mathcal{N}$ существует t, $t \in T$, такое, что $M\langle t, i\rangle \neq M\langle t, j\rangle$. Мощность теста называется также его *длиной.*

Заметим, что множество, состоящее из всех строк таблицы контроля, всегда образует тест. Тест, который перестает быть тестом при удалении любой своей строки, называется *тупиковым*, а тест, который имеет минимальную мощность, — *минимальным*. В том случае, когда целью контроля является диагностика схемы (проверка исправности схемы), тест называется *диагностическим* (соответственно *проверяющим*).

Будем говорить, что множество наборов τ, $\tau \subseteq A$, образует *тест для модели* $(\Sigma, \text{И})$ *относительно цели контроля* $\mathcal{N}$, или, иначе, *тест для* $(\Sigma, \text{И}, \mathcal{N})$, если соответствующие наборам из τ строки матрицы M образуют тест для $(M, \mathcal{N})$. Все введенные выше понятия, которые касаются тестов для таблиц, без изменений переносятся на случай тестов для ненадежных схем.

Для описания тестов можно ввести функцию, аналогичную функции покрытия из §6 главы 1. Пусть M, $M \in B^{p,s}$, — отделимая по столбцам матрица, а $\mathcal{N}$ — связанная с ней цель контроля. Сопоставим i-й строке, $i \in [1,p]$, матрицы M БП y_i, а каждому набору β, $\beta \in B^p$, значений этих переменных $y = (y_1, \ldots, y_p)$ — множество строк матрицы M с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1,p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta\langle i\rangle = 1$. Рассмотрим ФАЛ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует тест для $(M, \mathcal{N})$, и будем называть эту ФАЛ *функцией теста* для $(M, \mathcal{N})$. Сопоставим паре $(M, \mathcal{N})$ матрицу $\mathcal{M}$ из множества $B^{p,S}$, $S = |\mathcal{N}|$, столбцы которой пронумерованы парами из $\mathcal{N}$, а ее столбец с номером $(i,j) \in \mathcal{N}$ получается в результате поразрядного сложения по модулю 2 столбцов с номерами i и j матрицы M.

Заметим, что строки матрицы M с номерами из множества T, $T \subseteq [1,p]$, образуют тест (тупиковый тест, минимальный тест) для пары $(M, \mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда строки матрицы $\mathcal{M}$ с номерами из T образуют покрытие (тупиковое покрытие, покрытие минимальной длины) матрицы $\mathcal{M}$. Отсюда вытекает, в частности, что ФАЛ теста F для пары $(M, \mathcal{N})$ является одновременно ФАЛ покрытия для матрицы $\mathcal{M}$ и обратно, а значит для нее, в силу леммы 6.1 главы 1, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1

Функция теста $F(y_1, \ldots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M, $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$ может быть задана с помощью КНФ

$$F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{(i,j) \in \mathcal{N}} \Bigg(\bigvee_{\substack{1 \leqslant t \leqslant p \\ M\langle t,i \rangle \neq M\langle t,j \rangle}} y_t \Bigg), \qquad (2.1)$$

Следствие

Каждая простая импликанта вида $y_{t_1} \cdots y_{t_r}$ *сокращенной ДНФ функции* $F(y_1, \ldots, y_p)$, *получающаяся из КНФ* (2.1) *в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством* $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$, *и обратно.*

На данной лемме основан следующий алгоритм построения всех тупиковых тестов для матрицы M относительно цели контроля $\mathcal{N}$:
выписываем для функции теста КНФ вида (2.1);
раскрывая в ней скобки и, приводя подобные, получаем сокращенную ДНФ функции теста;
сопоставляем каждой простой импликанте этой сокращенной ДНФ тупиковый тест.

Так, например, для построения всех тупиковых диагностических тестов матрицы M вида

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

выпишем соответствующую ей КНФ (2.1):

$$F\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) = \left(y_1 \vee y_2 \vee y_3\right) \cdot \left(y_2 \vee y_4\right) \cdot \left(y_1 \vee y_3 \vee y_4\right).$$

Раскрывая в этой КНФ скобки и приводя подобные, получим сокращенную ДНФ для функции теста:

$$F\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) = y_1 y_2 \vee y_1 y_4 \vee y_2 y_3 \vee y_2 y_4 \vee y_3 y_4.$$

Следовательно, тупиковыми диагностическими тестами матрицы M являются множества ее строк с номерами

$$\{1, 2\},\ \{1, 4\},\ \{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\}.$$

Для упрощения преобразований, связанных с применением описанного алгоритма, вместо исходной матрицы M можно рассматривать отделимую по строкам матрицу $\check{M}$, получающуюся из M удалением повторных вхождений одинаковых строк. При этом, очевидно, любой тупиковый тест матрицы M получается из тупикового теста той же длины матрицы $\check{M}$ в результате замены каждой его строки равной ей строкой матрицы M (верно и обратное).

Рассмотрим, далее, некоторые оценки длины диагностических тестов для матриц с заданным числом столбцов.

Лемма 2.2

Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества $B^{p,s}$ заключена в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s-1)$.

Доказательство

Пусть $M \in B^{p,s}$ и пусть, для определенности, первые t строк матрицы M образуют ее тупиковый диагностический тест. Очевидно, что в этом случае все столбцы матрицы $\widetilde{M}$, состоящей из первых t строк матрицы M, различны и, следовательно, $s \leqslant 2^t$, то есть $t \geqslant \lceil \log s \rceil$, поскольку число различных булевых столбцов высоты t равно 2^t. Требуемая нижняя оценка длины диагностического теста установлена. Докажем теперь, что $t \leqslant (s-1)$. Для этого на множестве столбцов матрицы $\widetilde{M}$ при любом q, $q \in [1,t]$, определим отношение эквивалентности $\underset{q}{\sim}$ так, что $m' \underset{q}{\sim} m''$ тогда и только тогда, когда столбцы m' и m'' матрицы $\widetilde{M}$ совпадают в строках с номерами из отрезка $[1,q]$. Пусть, по определению, $\underset{0}{\sim}$ — тривиальное отношение с одним классом эквивалентности. Число классов эквивалентности по отношению $\underset{q}{\sim}$, $q \in [1,t]$, будем обозначать через $\theta(q)$.

Продолжение доказательства

Из общих свойств отношений эквивалентности вытекает, что при любом q, $q \in [1, t)$, каждый класс эквивалентности по отношению $\underset{q}{\sim}$ либо является классом эквивалентности по отношению $\underset{q+1}{\sim}$, либо представляет собой объединение двух таких классов и, следовательно, $\theta(q) \leqslant \theta(q+1)$. В силу тупиковости теста полученное неравенство является строгим, так как равенство $\theta(q) = \theta(q+1)$ возможно тогда и только тогда, когда каждый класс эквивалентности отношения $\underset{q}{\sim}$ является классом эквивалентности отношения $\underset{q+1}{\sim}$ и обратно, то есть строка с номером $(q+1)$ является «лишней» в рассматриваемом тесте.

Продолжение доказательства

Из диагностичности теста вытекает, что $\theta(t) = s$, и, таким образом, выполняются соотношения

$$1 = \theta(0) < \theta(1) < \cdots < \theta(t) = s,$$

из которых следует, что $t \leqslant (s-1)$.
Лемма доказана. $\square$

Замечание

Указанные в лемме границы достигаются: нижняя — на любой отделимой по столбцам матрице из $B^{p,s}$, где $p = \lceil \log s \rceil$, а верхняя — на матрице из $B^{s-1,s}$, все столбцы которой различны и содержат не более одной единицы (обе матрицы имеют единственный диагностический тест, состоящий из всех строк).

Следующее утверждение характеризует «типичное» значение длины диагностического теста, то есть длину минимального диагностического теста у «почти всех» таблиц контроля.

Лемма 2.3

Пусть $\varphi(s)$, $t(s)$ *и* $p(s)$ *— целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента* s, *для которых*

$$t(s) = \lceil 2\log s \rceil + \varphi(s), \quad p(s) \geqslant t(s), \quad \varphi(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} \infty.$$

Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ *первые* $t(s)$ *строк образуют диагностический тест.*

Доказательство.

Заметим, что все матрицы из $B^{p,s}$, где $p = p(s)$, у которых составленные из первых $t = t(s)$ строк подматрицы отделимы по столбцам, и сами отделимы по столбцам. Легко видеть также, что число таких матриц равно

$$2^t \left(2^t - 1\right) \cdots \left(2^t - s + 1\right) \cdot 2^{(p-t)s} = \\ = 2^{ps}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \cdots \left(1 - \frac{(s-1)}{2^t}\right),$$

а их доля среди всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ не меньше, чем

$$\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \cdots \left(1 - \frac{(s-1)}{2^t}\right) \geqslant 1 - \frac{s^2}{2^t} \geqslant 1 - 2^{-\varphi(s)},$$

и, следовательно, стремится к 1 при s стремящемся к бесконечности. Лемма доказана. $\square$

Следствие

Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции $\varphi(s)$ *у почти всех отделимых по столбцам матриц из* $B^{p,s}$, *где* $p \geqslant \lceil 2\log s \rceil + \varphi(s)$, *длина минимального диагностического теста не больше, чем* $\lceil 2\log s \rceil + \varphi(s)$.