

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 7

Метод семантических таблиц
в логике высказываний

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Вступление

Чтобы избежать проблем, возникших при попытке адаптировать переборный метод проверки общезначимости формул, попробуем предложить другой метод решения этой задачи, опирающийся **только** на логическую (индуктивную) семантику связок

Начнём с примера: попробуем доказать таким способом, что $\models x \& y \rightarrow x$

1. Предположим, что $\not\models x \& y \rightarrow x$
2. Тогда существует интерпретация \mathcal{I} , такая что $\mathcal{I} \not\models x \& y \rightarrow x$
3. Из " $\mathcal{I} \not\models x \& y \rightarrow x$ " и семантики " \rightarrow " следует $\mathcal{I} \models x \& y$ и $\mathcal{I} \not\models x$
4. Из $\mathcal{I} \models x \& y$ и семантики $\&$ следует $\mathcal{I} \models x$ и $\mathcal{I} \models y$
5. Получены соотношения $\mathcal{I} \not\models x$ и $\mathcal{I} \models x$ — такого быть не может, а значит, исходное предположение неверно ▼

Попробуем систематизировать ход таких рассуждений и избавиться от лишних слов доказательства

Семантические таблицы

Семантическая таблица T — это упорядоченная пара множеств формул:
 $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$

Множество формул $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ в каждой из частей таблицы будем также записывать без скобок (как последовательность): $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

Содержательное пояснение

На каждом шаге рассуждений в последнем примере имелся набор *положительных фактов* “ $\mathcal{I} \models \psi$ ” и *отрицательных фактов* “ $\mathcal{I} \not\models \psi$ ”

В левой части **таблицы** (Γ) записываются формулы из положительных фактов, а в правой (Δ) — из отрицательных фактов

Например, набор фактов $\mathcal{I} \models y$, $\mathcal{I} \models x$, $\mathcal{I} \not\models x$ записывается в виде таблицы $\langle x, y \mid x \rangle$

Семантические таблицы

Таблица T **выполнима**, если существует интерпретация \mathcal{I} , такая что

- ▶ для каждой формулы ψ из Γ верно $\mathcal{I} \models \psi$ и
- ▶ для каждой формулы χ из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi$

Таблица T **закрыта**, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Таблица T **атомарна**, если все формулы из Γ и Δ атомарны

Содержательное пояснение

Выполнимость таблицы — это отсутствие явных и неявных противоречий в имеющемся наборе фактов

В **закрытой** таблице содержится явное противоречие: про некоторую формулу χ утверждается одновременно $\mathcal{I} \models \chi$ и $\mathcal{I} \not\models \chi$

В **атомарной незакрытой** таблице содержится непротиворечивое описание того, что должно быть истинно и ложно в интерпретации \mathcal{I}

Например,

- ▶ таблица $\langle x \mid y \rangle$ выполнима, незакрыта и атомарна
- ▶ таблица $\langle x, y \mid x \rangle$ невыполнима, закрыта и атомарна
- ▶ таблица $\langle \mid x \ \& \ y \rightarrow x \rangle$ невыполнима, незакрыта и неатомарна

Семантические таблицы

Утверждение. Для любой формулы φ верно:

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима}$$

Утверждение. Любая закрытая таблица невыполнима

Утверждение. Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство. А попробуйте сами

Теперь перейдём к тому, как можно преобразовывать семантические таблицы, извлекая явные противоречия из невыполнимых таблиц и явное обозначение выполнимости из выполнимых

Преобразовывать таблицы будем до получения желаемого исхода по особым заранее сформулированным **правилам**, начав с таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$

Доказательства такого вида принято называть **логическим выводом**

Логический вывод, в котором преобразуются семантические таблицы, принято называть **табличным выводом**, а соответствующие правила — **правилами табличного вывода**

Табличный вывод

Будем использовать правила табличного вывода двух видов:

$$(*) : \frac{T_0}{T_1}, \quad (**): \frac{T_0}{T_1, T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Согласно правилу, рассматриваемая таблица T_0 преобразуется в

(*) в таблицу T_1 для последующего рассмотрения

(**) в таблицы T_1 и T_2 для поочерёдного рассмотрения

При этом правила будут подобраны так, чтобы

(*) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и T_1

(**) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и хотя бы одна из таблиц T_1, T_2

Таблицы T_1, T_2 под чертой в правилах иногда называют **альтернативами**

Табличный вывод

Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\&: \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\vee: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\rightarrow: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

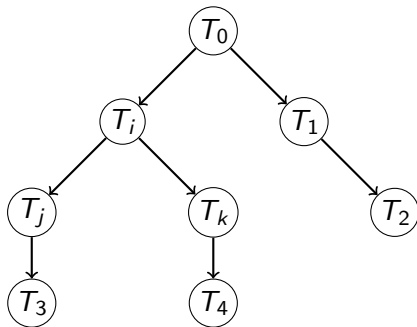
$$L\neg: \frac{\langle \Gamma, \neg \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg \varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

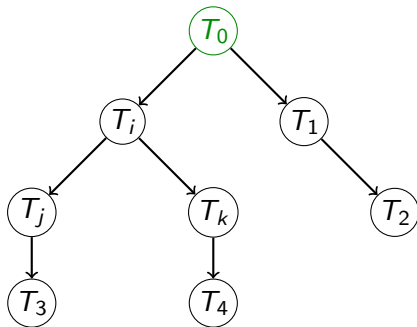
- его вершинам приписаны семантические таблицы



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

- его корню приспана таблица T_0

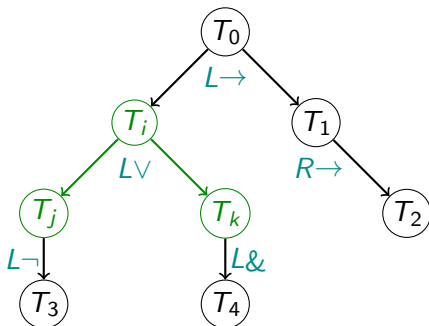


Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

3. из T_i исходят дуги в T_j (и T_k) \Leftrightarrow

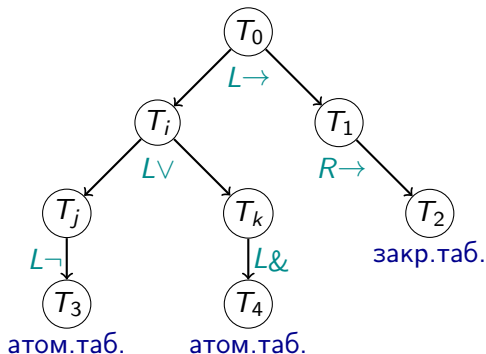
$\frac{T_i}{T_j(, T_k)}$ — правило табличного вывода



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

- все таблицы, приписанные листьям, закрыты или атомарны



Табличный вывод

Табличный вывод **успешен**, если он **конечен** и **всем** его листьям приписаны **закрытые таблицы**

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица, для которой он построен, невыполнима (*докажем это позже*)

Если этот вывод построен для таблицы $\langle \Gamma \mid \varphi \rangle$, то $\models \varphi$

Семантическая таблица $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ **конечна**, если $\Gamma \cup \Delta$ — конечное множество формул

Утверждение

Любой табличный вывод в логике высказываний для любой конечной таблицы конечен

Доказательство.

Глубина вывода для таблицы $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ не превосходит $(N + 1)$, где N — суммарное число связок в формулах из $\Gamma \cup \Delta$ ▼

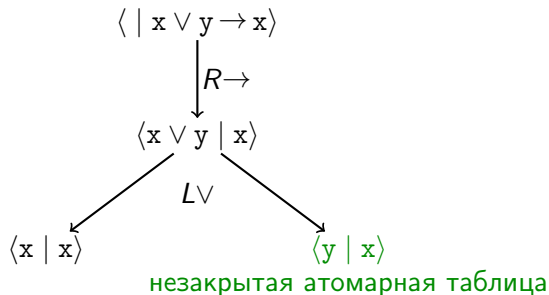
Табличный вывод: примеры

$$\begin{array}{c} \langle \mid x \rightarrow x \vee y \rangle \\ \downarrow R\rightarrow \\ \langle x \mid x \vee y \rangle \\ \downarrow R\vee \\ \langle x \mid x, y \rangle \\ \text{закрытая таблица} \end{array}$$

Вывод **успешен**

При этом $\models x \rightarrow x \vee y$

Табличный вывод: примеры



Вывод **неуспешен**

При этом $\not\models x \vee y \rightarrow x$

Табличный вывод: примеры



Вывод успешен

При этом $\models (x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow \neg x)$

Табличный вывод

Лемма(о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1, T_2}$
 $L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство.

Подробно остановимся только на правиле $L\rightarrow$: $\frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$

Пусть верхняя таблица выполнима —
покажем, что тогда выполнима хотя бы одна из нижних таблиц

Определение выполнимости таблицы:

существует интерпретация \mathcal{I} , такая что

- ▶ для любой формулы χ' из Γ верно $\mathcal{I} \models \chi'$
- ▶ для любой формулы χ'' из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi''$
- ▶ $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$

Табличный вывод

Лемма(о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1, T_2}$
 $L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $\chi' \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \chi'$ $\chi'' \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \chi''$ $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$

Так как $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$, верно хотя бы одно из двух:

- ▶ $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- ▶ $\mathcal{I} \models \psi$

Значит, хотя бы одна из таблиц $\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle$ выполнима

Рассуждения в обратную сторону
и для остальных связок аналогичны ▼

Табличный вывод

Теорема (о табличном выводе в логике высказываний)

Пусть D — табличный вывод
для конечной семантической таблицы T .

Тогда таблица T невыполнима
в том и только в том случае, если вывод D успешен

Доказательство. Следует из
леммы о корректности правил табличного вывода,
конечности табличного вывода и
невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие

$\models \varphi \Leftrightarrow$ для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод

Следствие

$\models \varphi \Leftrightarrow$ все выводы для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ успешны