

# Математическая логика и логическое программирование

[mk.cs.msu.ru](http://mk.cs.msu.ru) → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 30

Вычислительные возможности  
метода резолюций

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

## Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Пусть

- ▶  $S$  — система D-правил,
- ▶  $Q_1$  — D-запрос,
- ▶  $Q_1, R_1, Q_2, R_2, \dots, Q_k, R_k, \square, k \geq 0$ , — успешный входной резолютивный вывод из  $S \cup \{Q_1\}$ ,
- ▶  $\theta_1, \dots, \theta_k$  — наиболее общие унификаторы, согласно которым в выводе строятся резольвенты  $Q_2, \dots, Q_k, \square$  соответственно, и

Тогда  $S \models ((\neg Q_1)\theta_1 \dots \theta_k)^\forall$

Здесь и далее  $\varphi^\forall = \forall \tilde{x}^n \varphi$ , где  $\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Var}_\varphi$

Доказательство (индукцией по  $k$ ).

База:  $k = 0$

Тогда  $Q_1 = \square$ ,  $\text{Var}_{Q_1} = \emptyset$  и  $S \not\models \square$ , а значит,  $S \models \neg Q_1$

## Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Доказательство (индуктивный переход).

$$(Q_1, R_1 \xrightarrow{\theta_1} Q_2, R_2 \xrightarrow{\theta_2} \dots \xrightarrow{\theta_{k-1}} Q_k, R_k \xrightarrow{\theta_k} \square)$$

Пусть утверждение справедливо для  $k < N$  для заданного  $N$ ,  $N \geq 1$ ;  
покажем, что оно справедливо и для  $k = N$

Пусть, для ясности,  $Q_1 = \neg(A_1 \& \dots \& A_q \& B)$ ,  $Q_2 = \neg(A_1 \& \dots \& A_p) \theta_1$ ,  
 $R_1 = A_{q+1} \& \dots \& A_p \rightarrow C$ ,  $B\theta_1 = C\theta_1$  и  $\eta = \theta_2 \dots \theta_k$

По индуктивному предположению, верно  $S \models ((\neg Q_2)\eta)^\forall$

Значит, верно

$$S \models ((A_1 \& \dots \& A_q) \theta_1 \eta)^\forall \quad \text{и} \quad S \models ((A_{q+1} \& \dots \& A_p) \theta_1 \eta)^\forall \quad (\text{почему?})$$

При этом  $S \models (A_{q+1} \& \dots \& A_p \rightarrow C)^\forall$ , (почему?)  
а значит, и  $S \models ((A_{q+1} \& \dots \& A_p \rightarrow C) \theta_1 \eta)^\forall$  (почему?)

Тогда,  $S \models (C\theta_1 \eta)^\forall$  (почему?)

При этом  $C\theta_1 = B\theta_1$ , а значит,  $S \models (B\theta_1 \eta)^\forall$

Следовательно,  $S \models ((\neg Q_1) \theta_1 \eta)^\forall$  ▼

## Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: Даша, Саша, Паша и пиво

$$S = \left\{ \begin{array}{l} L(\Delta, C), \\ L(P, y) \& L(x, y) \rightarrow L(P, x) \end{array} \right. \quad Q_1 = \neg L(z, \Delta)$$

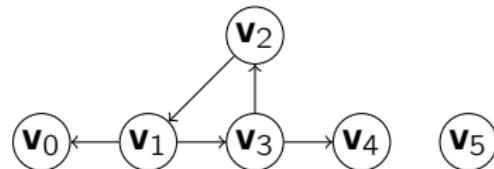
$$\begin{array}{c} \neg L(z, \Delta) \\ \downarrow \theta_1 = \{z/P, x'/\Delta, y'/y\} \\ L(P, y) \& L(x, y) \rightarrow L(P, x) \longrightarrow \neg(L(P, y) \& L(\Delta, y)) \\ \downarrow \theta_2 = \{y/C\} \\ L(\Delta, C) \longrightarrow \neg L(P, C) \\ \downarrow \theta_3 = \{x'/C, y'/y\} \\ L(P, y) \& L(x, y) \rightarrow L(P, x) \longrightarrow \neg(L(P, y) \& L(C, y)) \\ \downarrow \theta_4 = \{y/n\} \\ L(P, n) \longrightarrow \neg L(C, n) \\ \downarrow \theta_5 = \varepsilon \\ L(C, n) \longrightarrow \square \end{array}$$

По только что доказанной теореме, верно  $S \models L(z, \Delta)\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5$

То есть  $S \models L(P, \Delta)$ : Паша действительно любит Дашу

## Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

**Пример:** проверка достижимости в графе



Достижима ли вершина  $v_4$  из  $v_1$ , и если да, то по какому пути?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов и решить при помощи входной резолюции

Вершины графа  $(v_0, v_1, \dots)$  — это константы

Ещё так получится, что вершинами графа можно считать все термы, но в рассматриваемом примере это неважно

Тот факт, что  $(u, w)$  — дуга графа, будет записываться в виде атома  $\text{Arc}(u, w)$

Тогда в нашем распоряжении есть пять фактов, отвечающих пяти дугам:

$$\begin{array}{lll} \text{Arc}(v_1, v_0) & \text{Arc}(v_1, v_3) & \text{Arc}(v_3, v_2) \\ \text{Arc}(v_2, v_1) & \text{Arc}(v_3, v_4) & \end{array}$$

## Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

**Пример:** проверка достижимости в графе

Путь  $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$  будет записываться так (чтобы не путать дуги и импликации):

$$u_1 \hookrightarrow u_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow u_k$$

$\hookrightarrow$  — это функциональный символ местности 2

Символ  $\hookrightarrow$  положим **ассоциативным вправо**:  $x \hookrightarrow y \hookrightarrow z = x \hookrightarrow (y \hookrightarrow z)$

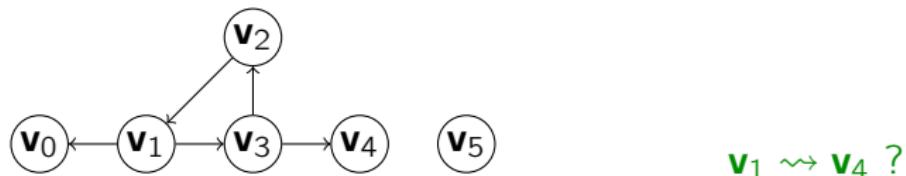
Тот факт, что вершина  $w$  достижима из  $u$  по пути  $\pi$ , будем записывать в виде атома  $\text{Reach}(u, w, \pi)$

Тогда для такого трёхместного отношения достижимости справедливы следующие свойства (*индуктивное определение*):

- ▶ Любая вершина достижима из себя по тривиальному пути
$$\forall x \text{Reach}(x, x, x)$$
- ▶ Если в графе есть дуга  $x \hookrightarrow y$  и из  $y$  по пути  $\pi$  достижима вершина  $z$ , то из  $x$  по пути  $x \hookrightarrow \pi$  достижима вершина  $z$ 
$$\forall x \forall y \forall z \forall p (\text{Arc}(x, y) \& \text{Reach}(y, z, p) \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \hookrightarrow p))$$

## Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

**Пример:** проверка достижимости в графе



Входные данные задачи можно записать в виде системы дизъюнктов:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Arc}(v_1, v_0) \quad \text{Arc}(v_1, v_3) \quad \text{Arc}(v_3, v_2) \\ \text{Arc}(v_2, v_1) \quad \text{Arc}(v_3, v_4) \quad \text{Reach}(x, x, x) \\ \text{Arc}(x, y) \& \text{Reach}(y, z, p) \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \rightarrow p) \end{array} \right\}$$

Вопрос к задаче можно записать в виде формулы  $\exists p \text{ Reach}(v_1, v_4, p)$

Отрицание этой формулы — это D-запрос

$$\varphi = \neg \text{Reach}(v_1, v_4, p)$$

Чтобы убедиться, что вершина  $v_4$  достижима из  $v_1$ , и найти соответствующий путь, достаточно построить успешный входной вывод  $\square$  из  $S \cup \{\varphi\}$ , инициированный  $\varphi$ , и применить недавно доказанную теорему

## Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

**Пример:** проверка достижимости в графе

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \text{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \quad \text{Reach}(x, x, x) \\ \text{Arc}(x, y) \& \text{Reach}(y, z, p) \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \hookrightarrow p) \\ \\ \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, p) \end{array} \right\}$$

$$\theta_1 = \{x/\mathbf{v}_1, z/\mathbf{v}_4, p/\mathbf{v}_1 \hookrightarrow p'\} \downarrow \quad \text{Arc}(x, y) \& \text{Reach}(y, z, p') \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \hookrightarrow p')$$
$$\neg (\text{Arc}(\mathbf{v}_1, y) \& \text{Reach}(y, \mathbf{v}_4, p')) \leftarrow \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$$

$$\theta_2 = \{y/\mathbf{v}_3\} \{p'/p, p'/p\} \downarrow \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$$
$$\neg \text{Reach}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, p) \leftarrow \quad \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, p)$$

$$\theta_3 = \{x/\mathbf{v}_3, z/\mathbf{v}_4, p/\mathbf{v}_3 \hookrightarrow p'\} \downarrow \quad \text{Arc}(x, y) \& \text{Reach}(y, z, p') \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \hookrightarrow p')$$
$$\neg (\text{Arc}(\mathbf{v}_3, y) \& \text{Reach}(y, \mathbf{v}_4, p')) \leftarrow \quad \neg (\text{Arc}(\mathbf{v}_3, y) \& \text{Reach}(y, \mathbf{v}_4, p'))$$

$$\theta_4 = \{y/\mathbf{v}_4\} \{p'/p, p/p'\} \downarrow \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$$
$$\neg \text{Reach}(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4, p) \leftarrow \quad \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4, p)$$

$$\theta_5 = \{p/\mathbf{v}_4, x/\mathbf{v}_4\} \downarrow \quad \text{Reach}(x, x, x)$$
$$\square \leftarrow \quad \square$$

$$\text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, p) \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 = \text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 \hookrightarrow \mathbf{v}_3 \hookrightarrow \mathbf{v}_4)$$

Следовательно, вершина  $\mathbf{v}_4$  достижима из  $\mathbf{v}_1$  по пути  $\mathbf{v}_1 \hookrightarrow \mathbf{v}_3 \hookrightarrow \mathbf{v}_4$