Лекция 2. Свойства биномиальных коэффициентов. Подсчет сумм и метод производящих функций (конечный случай). Полиномиальные коэффициенты. Оценки биномиальных и полиномиальных коэффициентов. Оценки сумм биномиальных коэффициентов.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по “Избранным вопросам дискретной математики”.
3-й курс, группа 318,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mathcyb.cs.msu.su

Биномиальные коэффициенты

Напомним, что **биномиальный коэффициент** $\binom{n}{k}$ равен числу сочетаний из n по k.

По теореме 1.4 верно $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$.
Откуда получаем

$$\frac{(n)_k}{k!} = \frac{(n)_k \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Следовательно,

Свойство 2.1. *Для всех* $0 \leq k \leq n$ *верно* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Последовательности биномиальных коэффициентов

Теорема 2.2. *При каждом $n \geq 1$ (конечная) последовательность биномиальных коэффициентов $\binom{n}{r}$, где $r = 0, 1, \ldots, n$, возрастает, если $r < \frac{n-1}{2}$, и убывает, если $r > \frac{n-1}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим отношение $\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}$, $0 \leq r \leq n-1$:

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n-r}{r+1}.$$

Определим, когда это отношение больше единицы:

$$\frac{n-r}{r+1} > 1, \text{ если } r < \frac{n-1}{2}.$$

Последовательности биномиальных коэффициентов

Доказательство (продолжение). Получаем, что
при $r < \frac{n-1}{2}$ последовательность возрастает,
при $r > \frac{n-1}{2}$ последовательность убывает.

$\square$

Пример 2.1.
Пусть $n = 3$. Тогда последовательность такова: $1,\ 3,\ 3,\ 1$.
Пусть $n = 4$. Тогда последовательность такова: $1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$.

Максимальные значения

Следствие 2.2.1. *При четных значениях n максимальное значение среди биномиальных коэффициентов $\binom{n}{r}$, $r = 0, 1, \ldots, n$, достигается только при $r = \frac{n}{2}$;*

при нечетных значениях n максимальное значение среди биномиальных коэффициентов $\binom{n}{r}$, $r = 0, 1, \ldots, n$, достигается при $r = \frac{n-1}{2}$ и при $r = \frac{n+1}{2}$.

Доказательство. По теореме 2.2 если $n \geq 1$, то при $r < \frac{n-1}{2}$ последовательность $\binom{n}{r}$, $r = 0, 1, \ldots, n$, возрастает и при $r > \frac{n-1}{2}$ последовательность $\binom{n}{r}$, $r = 0, 1, \ldots, n$, убывает.

Максимальные значения

Доказательство. Если значение n четно, то число $\frac{n-1}{2}$ нецелое; поэтому максимальное значение достигается при $r = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 = \frac{n}{2}$;

если значение n нечетно, то число $\frac{n-1}{2}$ целое; следовательно, $\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$, и максимальное значение достигается при $r = \frac{n-1}{2}$ и при $r = \frac{n+1}{2}$.

$\square$

Следствие 2.2.2. *Для всех $n \geq 1$ и $0 \leq r \leq n$ верно* $\binom{n}{r} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Суммы биномиальных коэффициентов

Напомним формулу бинома Ньютона (теорема 1.5):

При $n \geq 1$ *верно* $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Из нее следуют два свойства сумм биномиальных коэффициентов:

Теорема 2.3. *Для всех* $n \geq 1$ *верно*

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Доказательство.

1. $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. $(1+(-1))^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$. $\square$

Подсчет сумм биномиальных коэффициентов

Можно находить значения других сумм биномиальных коэффициентов, сводя их к суммам теорем 1.5 и 2.3.

Пример 2.2. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k$, где $a \in \mathbb{R}$.

Например, если $n = 2$, $a = 2$, то надо найти значение суммы $\binom{2}{0} \cdot 2^0 + \binom{2}{1} \cdot 2^1 + \binom{2}{2} \cdot 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$.

Решение. Несложно заметить, что указанная сумма непосредственно сворачивается по теореме 1.5:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot 1^{n-k} = (a+1)^n.$$

Подсчет сумм биномиальных коэффициентов

Пример 2.3. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$.

Например, если $n = 3$, то надо найти значение суммы $0 \cdot \binom{3}{0} + 1 \cdot \binom{3}{1} + 2 \cdot \binom{3}{2} + 3 \cdot \binom{3}{3} = 0 + 3 + 6 + 3 = 12$.

Решение. Заметим, что при $k \geq 1$ верно

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Слагаемое при $k = 0$ обнуляется. Поэтому, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Подсчет сумм биномиальных коэффициентов

Пример 2.4. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$.

Например, если $n = 4$, то надо найти значение суммы $\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + 6 + 1 = 8$.
Если $n = 5$, то надо найти значение суммы $\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 1 + 10 + 5 = 16$.

Решение. По теореме 2.3 (п. 2) верно $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Поэтому $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$.
Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

Производящие функции

Одним из методов получения значения комбинаторных сумм и доказательства тождеств является метод **производящих функций**.

Для последовательности чисел $\{a_n\}$ (конечной или бесконечной) рассмотрим формальную сумму (конечную или бесконечную) $\sum a_n t^n$, где $t \in \mathbb{R}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ конечна, то эта сумма всегда определяет функцию

$$F(t) = \sum a_n t^n,$$

которая называется **производящей функцией** для последовательности $\{a_n\}$.

Рассмотрим примеры подсчета комбинаторных сумм при помощи производящих функций.

Применение производящих функций

Вернемся к **примеру 2.3**: нам надо найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$.

Решение. Рассмотрим конечную последовательность биномиальных коэффициентов $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ и ее производящую функцию $F(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$. Из примера 2.2 следует, что $F(t) = (t+1)^n$.

Функция $F(t)$ дифференцируема в $\mathbb{R}$. Найдем ее производную.

С одной стороны, $F'(t) = ((t+1)^n)' = n(t+1)^{n-1}$.

С другой стороны, $F'(t) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k t^{k-1}$.

Подставляя в оба полученные выражения для производной $F'(t)$ значение $t = 1$, получаем $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

Применение производящих функций

Пример 2.5. Доказать тождество $\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{m}{k-r}=\binom{n+m}{k}$.

Решение. Рассмотрим конечные последовательности биномиальных коэффициентов $\binom{n}{r}$ и $\binom{m}{r}$, где $r=0,1,\ldots,\max(n,m)$, и их производящие функции

$$F(t)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r=(t+1)^n \text{ и } G(t)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}t^r=(t+1)^m.$$

Тогда

$$F(t)\cdot G(t)=(t+1)^n\cdot(t+1)^m=(t+1)^{n+m}=\sum_{s=0}^{n+m}\binom{n+m}{r}t^s.$$

С другой стороны, перемножаем многочлены:

$$F(t)\cdot G(t)=\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r\right)\cdot\left(\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}t^r\right)=\sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{r=0}^{s}\binom{n}{j}\binom{m}{r-j}\right)t^s.$$

Приравнивая коэффициенты при t^k, получаем

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}=\binom{n+m}{k}.$$

Обобщение формулы бинома Ньютона

Можно найти формулу для степени суммы вида $(x_1 + \cdots + x_m)^n$, аналогичную формуле бинома Ньютона.

Теорема 2.4. *Для всех $n \geq 1$, $m \geq 2$ верно*

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0 : \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}.$$

Доказательство можно провести индукцией по m. Базис индукции составляет формула бинома Ньютона (теорема 1.5).

$\square$

Полиномиальные коэффициенты

Комбинаторное число $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_{m-1}!k_m!}$, где $n \geq 1,\ k_1, \ldots, k_m \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$, называется **полиномиальным коэффициентом** и обозначается $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}$.

Через полиномиальные коэффициенты формулу из теоремы 2.4 можно переписать в следующем виде.

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0, \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}.$$

Формула квадрата суммы трех переменных

Пример 2.6. Найдем формулу для выражения $(x+y+z)^2$.

Решение. В соответствии с теоремой 2.4 сначала нам нужно найти всевозможные разбиения числа $n=2$ на *упорядоченные* суммы трех $(m=3)$ неотрицательных чисел.

Таких разбиений ровно $\hat{C}(3,2)=C(3+2-1,2)=6$ (см. пример 1.15 из предыдущей лекции):
$2=0{+}0{+}2=0{+}1{+}1=0{+}2{+}0=1{+}0{+}1=1{+}1{+}0=2{+}0{+}0.$

Теперь для каждой суммы надо найти соответствующий полиномиальный коэффициент:

$$C(0,0,2)=C(0,2,0)=C(2,0,0)=\frac{2!}{0!0!2!}=1;$$
$$C(0,1,1)=C(1,0,1)=C(1,1,0)=\frac{2!}{0!1!1!}=2.$$

Следовательно, получаем формулу

$$(x+y+z)^2=z^2+2yz+y^2+2xz+2xy+x^2.$$

Сумма полиномиальных коэффициентов

Аналогично теореме 2.3 можно получить значение суммы полиномиальных коэффициентов.

Теорема 2.5. *Для всех $n \geq 1$, $m \geq 2$ верно*

$$\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0, \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = m^n.$$

Доказательство. Подставим в формулу из теоремы 2.4 значения $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

$\square$

Оценки биномиальных коэффициентов

Иногда нужно знать оценки биномиальных коэффициентов или их сумм.

Оценка биномиального коэффициента

Теорема 2.6. *Для всех* $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, *верно* $\binom{n}{k} \leq \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$ (*по определению полагаем, что* $0^0 = 1$).

Доказательство. Сначала заметим, что для всех $n \geq 1$ верно $\binom{n}{0} = 1 \leq \frac{n^n}{n^n \cdot 0^0} = 1$, т.е. при $k = 0$ утверждение теоремы 2.6 верно.

Доказательство для $n \geq 1$ при всех k, $1 \leq k \leq n$ проведем индукцией по значению n.

Базис индукции. Если $n = 1$, то $\binom{n}{1} = 1 \leq \frac{1^1}{0^0 \cdot 1^1} = 1$.

Индуктивный переход. Предположим, что для некоторого $n \geq 1$ при всех k, $1 \leq k \leq n$, утверждение теоремы 2.6 верно. Рассмотрим $n+1$. Тогда $\binom{n+1}{k} =$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n+1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n+1}{k} \cdot \binom{n}{k-1}.$$

Оценка биномиального коэффициента

Доказательство (продолжение). Воспользуемся предположением индукции, что $\binom{n}{k-1} \le \frac{n^n}{(k-1)^{k-1}(n-k+1)^{n-k+1}}$, и проведем рассуждения:

$$\frac{n+1}{k}\cdot\binom{n}{k-1} \le \frac{n+1}{k}\cdot\frac{n^n}{(k-1)^{k-1}(n-k+1)^{n-k+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{k^k}{k^k} =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{k^k(n-k+1)^{n-k+1}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{k^{k-1}}{(k-1)^{k-1}} =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{k^k(n-k+1)^{n-k+1}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{(n+1)^{n+1}}{k^k(n-k+1)^{n-k+1}}.$$

В завершающем переходе мы воспользовались тем, что последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает. $\square$

Оценка полиномиального коэффициента

Следствие 2.6.1. *Для всех* $m \geq 2$ *и таких* $k_1, \ldots, k_m \geq 0$, *что* $k_1 + \cdots + k_m = n$, *верно*

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \leq \frac{n^n}{k_1^{k_1} \ldots k_m^{k_m}}$$

(*по определению полагаем, что* $0^0 = 1$).

Доказательство можно провести индукцией по m.
Базис индукции: $m = 2$ составляет теорема 2.6.

□

Функция энтропии

Рассмотрим функцию действительного аргумента $H(t) = -t\log_2 t - (1-t)\log_2(1-t)$ на интервале $t \in (0,1)$. Она называется **функцией (двузначной) энтропии**.

Теорема 2.7 [свойства функции энтропии]. *Для функции действительного агрумента $H(t) = -t\log_2 t - (1-t)\log_2(1-t)$ на интервале $t \in (0,1)$ верны свойства:*

1) $\lim\limits_{t\to 0+} H(t) = 0$, и $\lim\limits_{t\to 1-} H(t) = 0$;

2) на промежутке $t \in (0;\frac{1}{2}]$ функция $H(t)$ монотонно возрастает, а на промежутке $t \in [\frac{1}{2};1)$ функция $H(t)$ монотонно убывает;

3) свое единственное максимальное значение на интервале $t \in (0,1)$ функция $H(t)$ принимает ровно в одной точке $t = \frac{1}{2}$, причем $H\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Функция энтропии

Доказательство. Заметим, что
$H(t) = t\log_2\frac{1}{t} + (1-t)\log_2\frac{1}{1-t}$.

1) Тогда $\lim\limits_{t\to 0+} H(t) = \lim\limits_{t\to 0+} t\log_2\frac{1}{t} = \lim\limits_{t\to 0+} \frac{\log_2\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = 0$. Равенство $\lim\limits_{t\to 1-} H(t) = 0$ выводим аналогично.

Теперь найдем производную функции $H(t)$ и приравняем ее к нулю:

$$H'(t) = \left(\log_2\frac{1}{t} + t\cdot t\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{\ln 2}\right) +$$

$$+\left(-\log_2\frac{1}{1-t} + (1-t)\cdot(1-t)\cdot\frac{1}{(1-t)^2}\cdot\frac{1}{\ln 2}\right) = \log_2\frac{1-t}{t} = 0.$$

Откуда $t = \frac{1}{2}$.
Исследуя промежутки знакопостоянства производной $H(t)$ получаем утверждения 2) и 3).

Функция энтропии и биномиальные коэффициенты

Следствие 2.7.1. *Для всех $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n-1$ верно неравенство*

$$\binom{n}{k} \leq 2^{H\left(\frac{k}{n}\right)n},$$

где $H(t)$ – функция двузначной энтропии.

Доказательство. По теореме 2.6 верно неравенство:

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}.$$

Положим $\alpha = \frac{k}{n}$, тогда $k = \alpha n$, $n-k = (1-\alpha)n$. Получаем:

$$\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} = \frac{n^n}{\alpha^{\alpha n} n^{\alpha n}(1-\alpha)^{(1-\alpha)n} n^{(1-\alpha)n}} = \frac{1}{\alpha^{\alpha n}(1-\alpha)^{(1-\alpha)n}} =$$

$$= 2^{-\log_2\left(\alpha^{\alpha n}(1-\alpha)^{(1-\alpha)n}\right)} = 2^{n\left(\alpha \log_2 \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)\log_2 \frac{1}{1-\alpha}\right)} = 2^{H(\alpha)n}.$$

Оценка суммы биномиальных коэффициентов

Теорема 2.8. *При* $n \geq 1$ *и* $0 < k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *верно двойное неравенство*

$$\binom{n}{k} < \sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} < \frac{n-k}{n-2k} \binom{n}{k}.$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Докажем правое неравенство. Пусть $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{r=0}^{k} \binom{n}{r}$.

Сначала заметим, что для произвольного r, такого что $0 \leq r < k$, верно

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} =$$

$$= \frac{(k)_{k-r}}{(n-r)_{k-r}} \leq \left(\frac{k}{n-k}\right)^{k-r}.$$

Оценка суммы биномиальных коэффициентов

Доказательство (продолжение). Т.к. $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, верно $\frac{k}{n-k} < 1$. Тогда

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} = \binom{n}{k} \sum_{r=0}^{k} \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{k}} \leq \binom{n}{k} \left(1 + \left(\frac{k}{n-k} \right) + \left(\frac{k}{n-k} \right)^2 \ldots \right).$$

В больших скобках стоит сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{k}{n-k} < 1$. Найдем ее:

$$\frac{1}{1 - \frac{k}{n-k}} = \frac{n-k}{n-2k}.$$

Откуда получаем оценку:

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} \leq \frac{n-k}{n-2k} \cdot \binom{n}{k}.$$

Оценка суммы биномиальных коэффициентов

Следствие 2.8.1. *При* $n \geq 1$ *и* $k > \frac{n}{2}$ *верно неравенство*

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} < \frac{k}{2k-n} \binom{n}{k}.$$

Доказательство. По теореме 2.8 и свойству $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ получаем

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} = \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n}{s} < \frac{n-(n-k)}{n-2(n-k)} \binom{n}{n-k} = \frac{k}{2k-n} \binom{n}{k}.$$

$\square$

Оценки сумм биномиальных коэффициентов

Можно доказать следующие оценки сумм биномиальных коэффициентов.

Теорема 2.9. *1. Пусть $n \geq 1$, и $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Тогда*

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} < \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}.$$

2. Пусть $n \geq 1$, и $k > \frac{n}{2}$. Тогда

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} < \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}.$$

Асимптотические оценки

При решении задач довольно часто необходимо знать асимптотическое поведение биномиальных коэффициентов и их сумм.

Обычно находят **асимтотику** или **порядок** комбинаторных чисел.

O-символика

Напомним некоторые определения из математического анализа. Мы будем изучать поведение неотрицательных функций натурального аргумента n при $n \to \infty$.

Пишут $\varphi(n) = O(\psi(n))$, если существует такая положительная константа C, что $\varphi(n) \leq C \cdot \psi(n)$.

Если одновременно выполняются условия $\varphi(n) = O(\psi(n))$ и $\psi(n) = O(\varphi(n))$, то говорят, что функции $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ имеют **одинаковый порядок (равны по порядку)**, и пишут $\varphi(n) \asymp \psi(n)$.

Пишут $\varphi(n) = o(\psi(n))$, если существует такая функция $\chi(n)$, $\chi(n) \to 0$ при $n \to \infty$, что $\varphi(n) = \chi(n) \cdot \psi(n)$.

Говорят, что функции $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ **эквивалентны (асимптотически равны)**, и пишут $\varphi(n) \sim \psi(n)$, если $\varphi(n) = \psi(n) + o(\psi(n))$.

Асимптотика биномиальных коэффициентов

При помощи формулы Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, где e обозначает основание натурального логарифма ($e = 2,71\ldots$), можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2.10. *При* $k \to \infty$ *и* $n - k \to \infty$ *верно*

$$\binom{n}{k} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}.$$

Следствие 2.10.1. *При* $n \to \infty$ *для четных значений* n *верно*

$$C_n^{\frac{n}{2}} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}}.$$

Асимптотика сумм биномиальных коэффициентов

Теорема 2.11. *Если* $\varphi(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *и* $\varphi(n)\sqrt{n} = o(n)$, *то*

$$\sum_{r=\lfloor \frac{n}{2}-\varphi(n)\sqrt{n}\rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2}+\varphi(n)\sqrt{n}\rfloor} \binom{n}{r} \sim 2^n.$$

Доказательство. Пусть $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. По теореме 2.8 верно, что

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} < \frac{n-k}{n-2k}\binom{n}{k}.$$

Асимптотика сумм биномиальных коэффициентов

Доказательство (продолжение). С другой стороны, по свойству 2.1 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ для всех k, а по следствию 2.2.1 $\binom{n}{r} \le \binom{n}{k}$ при $r \le k \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Откуда получаем

$$\binom{n}{k} \cdot (n-2k) = \underbrace{\binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{k}}_{n-2k} \le$$

$$\le \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \dots + \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \dots + \binom{n}{n-k} \le \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

Значит, нашли оценку:

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} \le 2^n \cdot \frac{n-k}{(n-2k)^2}.$$

Асимптотика сумм биномиальных коэффициентов

Доказательство (продолжение). Пусть теперь $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\varphi(n)\sqrt{n} = o(n)$, и $k = \lfloor \frac{n}{2} - \varphi(n)\sqrt{n} \rfloor$-1.

Тогда

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} \le 2^n \cdot \frac{n - \lfloor \frac{n}{2} - \varphi(n)\sqrt{n} \rfloor}{(n - 2\lfloor \frac{n}{2} - \varphi(n)\sqrt{n} \rfloor)^2} \le$$

$$\le 2^n \cdot \frac{n - \frac{n}{2} + \varphi(n)\sqrt{n} + 1}{(n - 2\frac{n}{2} + 2\varphi(n)\sqrt{n})^2} =$$

$$= 2^n \cdot \frac{\frac{n}{2} + \varphi(n)\sqrt{n} + 1}{4\varphi^2(n)n} = 2^n \cdot \frac{1}{C\varphi^2(n)} = o(2^n) \text{ при } n \to \infty.$$

По свойству 2.1 заключаем $\sum\limits_{r=n-k}^{n} \binom{n}{k} = o(2^n)$.

Теорема 2.11 доказана (Почему?).

Как распределяются значения биномиальных коэффициентов?

Теорема 2.11 имеет простой содержательный смысл: в значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ всех биномиальных коэффициентов при достаточно больших n **основной** вклад вносят коэффициенты с большим значением k (примерно половина n плюс-минус корень из n на некоторую возрастающую функцию).

И наоборот, коэффициенты с малым значением k никакого **существенного** вклада в значение суммы не вносят (они все есть всего лишь o-маленькое от 2^n).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

2. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k$.

3. Найти максимальное значение и поведение последовательности $(k-1)^r\binom{n}{r}$, где $r = 0, 1, \ldots, n$, а k – натуральное число, $k \geq 3$.

4. Аналогично теореме 2.7 найти свойства функции k-значной энтропии (k – натуральное число, $k \geq 3$)

$$H_k(t) = -t\log_k t - (1-t)\log_k(1-t) + t\log_k(k-1)$$

на промежутке $t \in (0, 1)$.

5. [2] Гл. VIII 1.18, 1.25, 3.10, 5.8.

Литература к лекции 2

[1]. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. II, с. 197-200, 202-214.

[2]. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. VIII 1.13, 1.18, 3.10.

Конец лекции 2