«Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики»

Осенний семестр 2019–2020 уч. г. группы 411–419

Лекторы —
профессор С. С. Марченков,
профессор С. А. Ложкин

Информационная поддержка курса:
http://mk.cs.msu.ru/index.php/Дополнительные_главы_дискретной_математики_и_кибернетики_(2-й_поток,_4_курс)

III. Сложность структурной реализации функций алгебры логики из некоторых классов

26. Задача синтеза схем для ФАЛ (операторов) из специального класса, нижние мощностные оценки функции Шеннона для их сложности в случае невырожденного (ненулевого, квазиинвариантного) класса

Утверждение 26.1 Если Q — невырожденный класс ФАЛ (операторов), то

$$L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \gtrsim \frac{\log|Q(n)|}{\log\log|Q(n)|} = J(|Q(n)|),$$

а если Q — строго невырожденный класс ФАЛ, то

$$L^{\mathrm{K}}(Q(n)) \gtrsim \frac{\log|Q(n)|}{\log\log|Q(n)|} = J(|Q(n)|).$$

Следствие. Для всякого ненулевого класса ФАЛ Q выполняются асимптотические равенства:

$$L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \gtrsim \sigma_Q(n)2^n/n, L^{\mathrm{K}}(Q(n)) \gtrsim \sigma_Q(n)2^n/n.$$

Утверждение 26.2 Пусть Q — квазиинвариантный класс ФАЛ. Тогда существуют предел

$$\sigma_Q = \lim_{n\to\infty} \sigma_Q(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|Q(n)|}{2^n},$$

где $0 \leqslant \sigma_Q \leqslant 1$.

Утверждение 26.3 Для всякого ненулевого квазиинвариантного класса Q и $n = 1, 2, \ldots$

$$L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \gtrsim \sigma_Q \frac{2^n}{n}.$$

27. Инвариантные классы функций С. В. Яблонского, их описание на языке базовых множеств и порождающих элементов. Теорема о числе инвариантных классов и фрагменты её доказательства

Утверждение 27.1
Класс P_2 является единственным инвариантным классом ФАЛ Q, для которого $\sigma_Q = 1$. Для любого действительного σ, $\sigma \in [0, 1)$, существует континуум инвариантных классов Q, для которых $\sigma_Q = \sigma$.

Утверждение 27.2
Пусть Q — нетривиальный и не равный P_2 инвариантный класс, а G — его порождающее множество. Тогда множество $P_2 \setminus Q$ состоит из всех псевдонадфункций ФАЛ из G.

Следствие. Если Q — множество ФАЛ, не являющихся (с точностью до равенства и конгруэнтности) подфункциями друг друга, то G — порождающее множество инвариантного класса, дополнение которого включает в себя (с точностью до равенства и конгруэнтности) все надфункции ФАЛ из G.

28. Синтез схем для функций из специальных классов на основе модификации асимптотически наилучшего метода. Стандартные классы и стандартность класса ФАЛ равных нулю на всех наборах значений переменных, номера которых больше заданного числа

Утверждение 28.1 Для любой функции $r = r(n) \geqslant 1$ класс ФАЛ $Q(n) = P_2(n, r(n))$ является стандартным классом ФАЛ, то есть

$$L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \lesssim \frac{r}{\log r} + O(n).$$

Следствие Если $n = o(r/\log r)$, то $Q(n) = P_2(n, r(n))$ — стандартный невырожденный класс ФАЛ, для которого

$$L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \sim \frac{r}{\log r}.$$

29. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для ненулевых квазиинвариантных классов, их стандартность

Утверждение 29.1 Для всякого квазиинвариантного класса Q и $n = 1, 2, \ldots$

$$L^{\mathrm{C}}\big(Q(n)\big) \sim \sigma_Q \frac{2^n}{n}, \text{ при } \sigma_Q > 0,$$

$$L^{\mathrm{C}}\big(Q(n)\big) = o\left(\frac{2^n}{n}\right), \text{ при } \sigma_Q = 0.$$

30. Общее описание принципа локального кодирования, его применение для доказательства стандартности классов квазиинвариантных и самодвойственных ФАЛ

Утверждение 30.1 Класс самодвойственных ФАЛ $S(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, является невырожденным стандартным классом ФАЛ, т. е.

$$L^{\mathrm{C}}(S(n)) \sim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

31. Применение принципа локального кодирования для доказательства стандартности некоторых классов операторов

Утверждение 31.1 Для $m = m(n)$ при $\log m = o(n)$ и $\log n = o(m)$ класс симметрических (n, m)-операторов $Q(n)$ является стандартным невырожденным классом, т. е. $L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \sim m \cdot n / \log n$.

Утверждение 31.2 Для $m = m(n) = \mathrm{Const}$ класс (n, m)-операторов, где $Q(n) = \{F = (f_1, \ldots, f_m) \in P_2^m(n) \mid f_i(\tilde{\beta}) = f_1(\tilde{\alpha}), \text{где } i \in [2, m], \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^n, \nu(\tilde{\beta}) = \nu(\tilde{\alpha}) + i - 1 \pmod{2^n}\}$ является стандартным невырожденным классом, т. е. $L^{\mathrm{C}}(Q(n)) \sim 2^n / n$.

32. Задача синтеза схем для неоднозначно заданных и не всюду определённых (систем) ФАЛ. Нижние мощностные оценки функции Шеннона для сложности не всюду определённых ФАЛ и её асимптотические оценки

Утверждение 32.1
Если $n \cdot \log n = o(t(n))$, то функция Шеннона $L^{\mathrm{C}}(\hat{P}_2(n, t(n))$, характеризующая сложность реализации не всюду определённых ФАЛ от БП $x_1, \ldots x_n$, область определённости которых имеет мощность не больше, чем t, асимптотически не меньше, чем $t(n)/\log t(n)$.

Утверждение 32.2
Если $n \cdot \log^2 n = o(t)$, то

$$L^{\mathsf{C}}(\hat{P}_2(n, t(n)) \lesssim t/\log t.$$

Следствие. В условиях утв. 32.2

$$L^{\mathsf{C}}(\hat{P}_2(n, t(n)) \sim t/\log t.$$

33. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для не всюду определённых функций в случае их «сильной» определённости

34. Лемма о линейном разделяющем операторе. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для не всюду определённых функций в случае их «средней» и «слабой» определённости

Утверждение 34.1
Для любого множества A, $A \subseteq B^n$, и любого s, $s \leqslant n$, существует линейный (n, s)-оператор, разделяющий некоторое множество A', $A' \subseteq A$, такое, что

$$|A'| \geqslant t - \frac{t(t-1)}{2^{s+1}}.$$

35. Лемма о цепях и сечениях π-схем. Верхние оценки сложности реализации линейных функций в классе π-схем

Утверждение 35.1
В произвольной π-сети любая простая цепь и любое тупиковое сечение имеют ровно 1 общее ребро.

Утверждение 35.2
При $n \geqslant 1$ для линейной ФАЛ ℓ_n^σ, $\ell_n^\sigma = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$, выполнены неравенства

$$L^\pi(\ell_n^\sigma) \leqslant 4n^2, \quad D(\ell_n^\sigma) \leqslant 2\log n + 3.$$

36. Теорема В.М. Храпченко, нижние оценки сложности линейной функции в классе π-схем

Утверждение 36.1
Для любой ФАЛ f из $P_2(n)$ и любых множеств $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$ таких, что $\mathcal{N}' \subset N_f$ и $\mathcal{N}'' \subset \overline{N}_f$ справедливо неравенство

$$L^{\pi}(f) \geqslant \frac{|R(\mathcal{N}', \mathcal{N}'')|^2}{|\mathcal{N}'| \cdot |\mathcal{N}''|}.$$

Следствие.

$$L^{\pi}(\ell_n^{\sigma}) \geqslant n^2, \quad D(\ell_n^{\sigma}) \geqslant 2 \log n$$