Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 28

Символьный алгоритм проверки моделей для CTL (окончание)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Преобразователь $\mathbf{EX}_M$

Каждой ctl-формуле φ для предзаданной модели Крипке M можно сопоставить предикат, задающий множество всех состояний M, в которых выполнена φ: $Sat_M(\varphi) = Sat(M, \varphi)$

Этот предикат можно представить символьно: $\Phi_\varphi^M = \Phi_{Sat_M(\varphi)}$

Для заданной модели Крипке комбинация **EX** может расцениваться как преобразователь таких предикатов:

$$\mathbf{EX}_M(Sat_M(\varphi)) = Sat_M(\mathbf{EX}\varphi)$$

Согласно устройству процедуры $\mathfrak{P}_{\mathbf{EX}}$, преобразователь $\mathbf{EX}_M$ можно задать так:

$$\mathbf{EX}_M(Z) = Pre(M, Z)$$

Преобразователь $\mathbb{f}$, задающийся равенством $\mathbb{f}(Z) = E$ для произвольного предиката Z и выражения E (вообще говоря зависящего от Z), можно представить записью $\lambda Z.E$: это запись функции, принимающей на вход значение Z и возвращающей значение выражения E для этого значения

Тогда, в частности, $\mathbf{EX}_M = \lambda Z.Pre(M, Z)$, и символьное представление этого преобразователя можно устроить так: $\mathbf{EX}_{\mathfrak{M}} = \lambda Z.\mathfrak{F}_{pre}(\mathfrak{M}, Z)$

Преобразователь $\mathbf{EX}_M$

Лемма. **Для любых модели Крипке M и предиката C преобразователь $\mathbb{f} = \lambda Z.\, C \cap \mathbf{EX}_M(Z)$ является монотонным**

Доказательство.

Рассмотрим предикаты A и B, такие что $A \subseteq B$, и покажем, что $\mathbb{f}(A) \subseteq \mathbb{f}(B)$, то есть что для любого состояния $s \in \mathbb{f}(A)$ верно $s \in \mathbb{f}(B)$

Так как $s \in \mathbb{f}(A)$, верно $s \in C$ и $s \in \mathbf{EX}_M(A)$

$s \in \mathbf{EX}_M(A)$ означает, что существует состояние s', такое что $s' \in A$ и $s \to s'$

Так как $A \subseteq B$, верно и $s' \in B$

Значит, $s \in \mathbf{EX}_M(B)$, и следовательно, $s \in C \cap \mathbf{EX}_M(B) = \mathbb{f}(B)$ ▼

Преобразователь $\mathbf{EG}_M$

Лемма. **Для любых модели Крипке M и ctl-формулы φ предикат $Sat_M(\mathbf{EG}\varphi)$ является неподвижной точкой преобразователя $\lambda Z.Sat_M(\varphi) \cap \mathbf{EX}_M(Z)$**

Доказательство.

По определению неподвижной точки, достаточно показать равенство

$$Sat_M(\mathbf{EG}\varphi) = Sat_M(\varphi) \cap \mathbf{EX}_M(Sat_M(\mathbf{EG}\varphi))$$

По определениям Sat_M и $\mathbf{EX}_M$, достаточно показать равносильность

$$M, s \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow M, s \models \varphi \text{ и } M, s \models \mathbf{EXEG}\varphi$$

По семантике ctl-формул,

- «$M, s \models \mathbf{EG}\varphi$» $\Leftrightarrow$ в M из s исходит хотя бы один бесконечный путь $s_1, s_2, \ldots$, такой что $M, s_1 \models \varphi$, $M, s_2 \models \varphi$, ...
- «$M, s \models \varphi$ и $M, s \models \mathbf{EXEG}\varphi$» $\Leftrightarrow$ $M, s \models \varphi$ и в M из s исходит хотя бы один бесконечный путь $s_1, s_2, \ldots$, такой что $M, s_2 \models \varphi$, $M, s_3 \models \varphi$, ...

Легко видеть, что последние два пункта равносильны ▼

Преобразователь $\mathbf{EG}_M$

Лемма. **Для любых конечной модели Крипке M и ctl-формулы φ предикат $Sat_M(\mathbf{EG}\varphi)$ является наибольшей неподвижной точкой преобразователя $\lambda Z.Sat_M(\varphi) \cap \mathbf{EX}_M(Z)$**

Доказательство. Можете попробовать самостоятельно

Из последней леммы естественно вытекает альтернативный (по сравнению с базовым алгоритмом) вариант процедуры $\mathfrak{P}_{\mathbf{EG}}(M, \varphi)$:

- Вычислить $X = Sat(M, \varphi) = \mathfrak{P}'_{sat}(M, \varphi)$
- Вернуть предикат $\mathfrak{P}_{gfp}(M, \lambda Z.X \cap \mathbf{EX}_M(Z))$

Эту процедуру несложно представить символьно ($\mathfrak{F}_{\mathbf{EG}}(\mathfrak{M}, \varphi)$):

- Вычислить $\Phi_X = \mathfrak{F}'_{sat}(\mathfrak{M}, \varphi)$
- Вернуть представление $\mathfrak{F}_{gfp}(\mathfrak{M}, \lambda Z.\Phi_X \,\&\, \mathbf{EX}_{\mathfrak{M}}(Z))$

Преобразователь $\mathbf{EU}_M$

Лемма. **Для любых модели Крипке M и ctl-формул φ и ψ предикат $Sat_M(\mathbf{E}(\varphi\mathbf{U}\psi))$ является неподвижной точкой преобразователя $\lambda Z.Sat_M(\psi) \cup (Sat_M(\varphi) \cap \mathbf{EX}_M(Z))$**

Доказательство.

По определению неподвижной точки, достаточно показать равенство

$$Sat_M(\mathbf{E}(\varphi\mathbf{U}\psi)) = Sat_M(\psi) \cup (Sat_M(\varphi) \cap \mathbf{EX}_M(Sat_M(\mathbf{E}(\varphi\mathbf{U}\psi))))$$

По определениям Sat_M и $\mathbf{EX}_M$, достаточно показать равносильность

$$M, s \models \mathbf{E}(\varphi\mathbf{U}\psi) \Leftrightarrow M, s \models \psi \text{ или } (M, s \models \varphi \text{ и } M, s \models \mathbf{EXE}(\varphi\mathbf{U}\psi))$$

Аналогично доказательству такой же леммы для $\mathbf{EG}\varphi$, легко видеть, что эта равносильность действительно справедлива ▼

Лемма. **Для любых <u>конечной</u> модели Крипке M и ctl-формул φ и ψ предикат $Sat_M(\mathbf{E}(\varphi\mathbf{U}\psi))$ является <u>наименьшей</u> неподвижной точкой преобразователя $\lambda Z.Sat_M(\psi) \cup (Sat_M(\varphi) \cap \mathbf{EX}_M(Z))$**

Доказательство. Можете попробовать самостоятельно

Преобразователь $\mathbf{EU}_M$

Из последней леммы естественно вытекает альтернативный (по сравнению с базовым алгоритмом) вариант процедуры $\mathfrak{P}_{\mathbf{EU}}(M, \varphi, \psi)$:

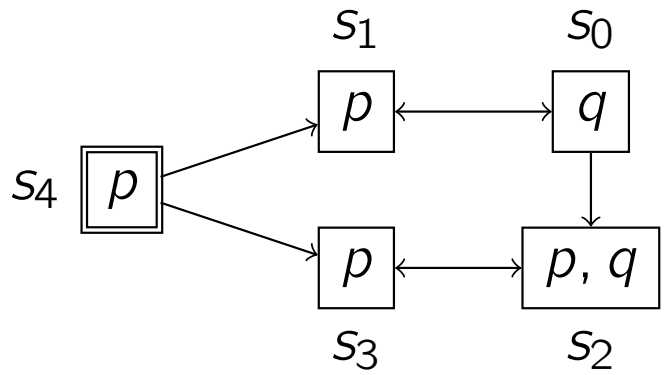
- Вычислить $X = Sat(M, \varphi) = \mathfrak{P}'_{sat}(M, \varphi)$ и $Y = Sat'(m, \psi) = \mathfrak{P}'_{sat}(M, \psi)$
- Вернуть предикат $\mathfrak{P}_{lfp}(M, \lambda Z.Y \cup (X \cap \mathbf{EX}_M(Z)))$

Эту процедуру несложно представить символьно ($\mathfrak{F}_{\mathbf{EU}}(\mathfrak{M}, \varphi, \psi)$):

- Вычислить $\Phi_X = \mathfrak{F}'_{sat}(\mathfrak{M}, \varphi)$ и $\Phi_Y = \mathfrak{F}'_{sat}(\mathfrak{M}, \psi)$
- Вернуть представление $\mathfrak{F}_{lfp}(\mathfrak{M}, \lambda Z.\Phi_Y \vee (\Phi_X \,\&\, \mathbf{EX}_{\mathfrak{M}}(Z)))$

Символьный алгоритм: пример

M:



$$\varphi = \mathbf{EX}p \,\&\, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)$$

Для начала проиллюстрируем модифицированный базовый алгоритм

Начало — такое же, как в исходном базовом алгоритме:

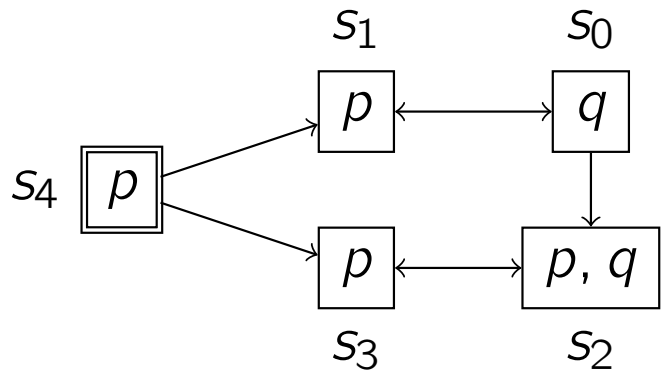
$Sat_M(p) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$

$Sat_M(\mathbf{EX}p) = Pre(Sat(M, p)) = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$

$Sat_M(q) = \{s_0, s_2\}$

Символьный алгоритм: пример

M:



$$\varphi = \mathbf{EX}p \,\&\, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)$$

Преобразователь для $\mathbf{EG}p$:

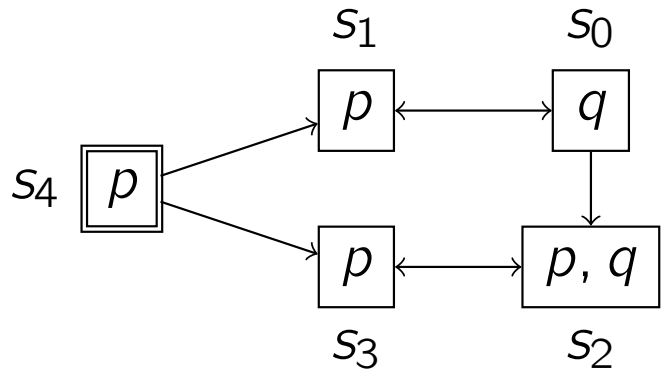
$$\mathbb{f}_1 = \lambda Z.Sat_M(p) \cap \mathbf{EX}_M(Z) = \lambda Z.\{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap Pre(M, Z)$$

Вычисление наибольшей неподвижной точки $\mathbb{f}_1$:

- $X_0 = S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$
- $X_1 = \mathbb{f}_1(X_0) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap Pre(M, S) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
- $X_2 = \mathbb{f}_1(X_1) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap \{s_0, s_2, s_3, s_4\} = \{s_2, s_3, s_4\}$
- $X_3 = \mathbb{f}_1(X_2) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap \{s_0, s_2, s_3, s_4\} = \{s_2, s_3, s_4\} = X_2$
- $Sat_M(\mathbf{EG}p) = \nu Z.\mathbb{f}_1(Z) = X_3 = \{s_2, s_3, s_4\}$

Символьный алгоритм: пример

M:



$$\varphi = \mathbf{EX}p \,\&\, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)$$

Преобразователь для $\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)$:

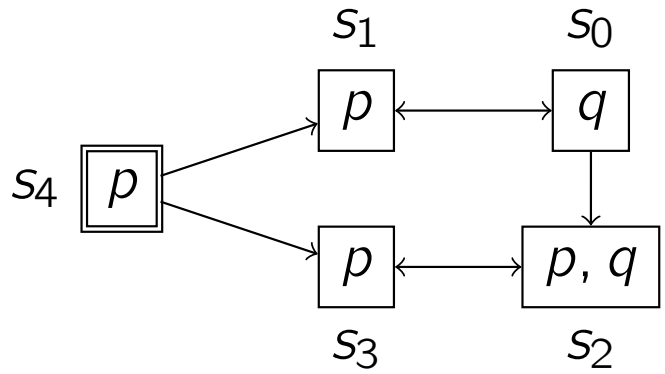
$\mathbb{f}_2 = \lambda Z.Sat_M(\mathbf{EG}p) \cup (Sat_M(q) \cap \mathbf{EX}_M(Z)) =$
$\lambda Z.\{s_2, s_3, s_4\} \cup (\{s_0, s_2\} \cap \mathbf{EX}_M(Z))$

Вычисление наименьшей неподвижной точки $\mathbb{f}_2$:

- $X_0 = \emptyset$
- $X_1 = \mathbb{f}_2(X_0) = \{s_2, s_3, s_4\} \cup (\{s_0, s_2\} \cap \emptyset) = \{s_2, s_3, s_4\}$
- $X_2 = \mathbb{f}_2(X_1) = \{s_2, s_3, s_4\} \cup (\{s_0, s_2\} \cap \{s_0, s_2, s_3, s_4\}) = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$
- $X_3 = \mathbb{f}_2(X_2) = \{s_2, s_3, s_4\} \cup (\{s_0, s_2\} \cap \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}) =$
  $\{s_0, s_2, s_3, s_4\} = X_2$
- $Sat_M(\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)) = \mu Z.\mathbb{f}_2(Z) = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$

Символьный алгоритм: пример

M:



$\varphi = \mathbf{EX}p \,\&\, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)$

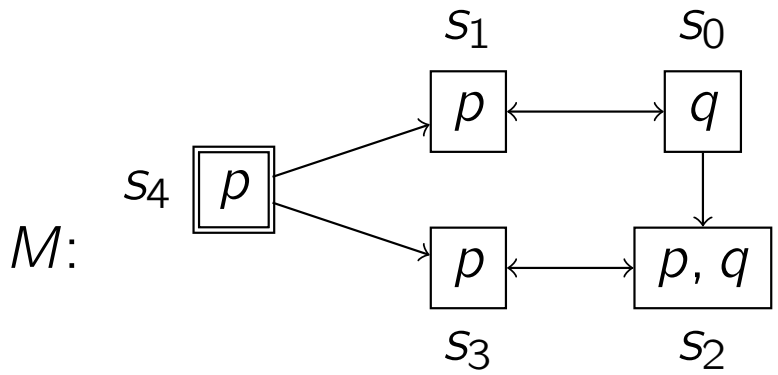
Конец — такой же, как в исходном базовом алгоритме

$Sat_M(\neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)) = S \setminus Sat_M(\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)) = \{s_1\}$

$Sat_M(\varphi) = Sat_M(\mathbf{EX}p) \cap Sat_M(\neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)) = \emptyset$

Так как $\{s_4\} \not\subseteq \emptyset$, можно заключить, что $M \not\models \varphi$

Символьный алгоритм: пример



$$\varphi = \mathbf{EX}p \,\&\, \neg\mathbf{E}(q\mathbf{UEG}p)$$

Символьное представление модели M, основанное на формулах, для трёх разрядов, отвечающих переменным x_0, x_1, x_2, с естественным кодированием состояний согласно номерам выше:

- $\Phi_S = x_2 \to \neg x_1 \,\&\, \neg x_0$
- $\Phi_{S_0} = x_2 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_0$
- $\Phi_\to =$
  $\Phi_S \,\&\, \neg x_2' \,\&((x_1 \leftrightarrow x_1') \,\&(x_0 \oplus x_0') \vee \neg x_2 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_0 \,\&\, \neg x_1' \,\&\, x_1' \,\&\, \neg x_0')$
- $\Phi_p = \Phi_S \,\&(x_2 \vee x_1 \vee x_0)$
- $\Phi_q = \neg x_2 \,\&\, \neg x_0$

А переписать результаты работы модифицированного базового алгоритма в символьном виде можете попробовать сами