

Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 28

Символьный алгоритм проверки моделей для CTL
(окончание)

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Преобразователь \mathbf{EX}_M

Каждой ctl-формуле φ для предзаданной модели Крипке M можно сопоставить предикат, задающий множество всех состояний M , в которых выполнена φ : $Sat_M(\varphi) = Sat(M, \varphi)$

Этот предикат можно представить символьно: $\Phi_\varphi^M = \Phi_{Sat_M(\varphi)}$

Для заданной модели Крипке комбинация \mathbf{EX} может расцениваться как преобразователь таких предикатов:

$$\mathbf{EX}_M(Sat_M(\varphi)) = Sat_M(\mathbf{EX}\varphi)$$

Согласно устройству процедуры $\mathfrak{F}_{\mathbf{EX}}$, преобразователь \mathbf{EX}_M можно задать так:

$$\mathbf{EX}_M(Z) = Pre(M, Z)$$

Преобразователь \mathfrak{f} , задающийся равенством $\mathfrak{f}(Z) = E$ для произвольного предиката Z и выражения E (вообще говоря зависящего от Z), можно представить записью $\lambda Z.E$: это запись функции, принимающей на вход значение Z и возвращающей значение выражения E для этого значения

Тогда, в частности, $\mathbf{EX}_M = \lambda Z.Pre(M, Z)$, и символьное представление этого преобразователя можно устроить так: $\mathbf{EX}_{\mathfrak{M}} = \lambda Z.\mathfrak{F}_{pre}(\mathfrak{M}, Z)$

Преобразователь \mathbf{EX}_M

Лемма. Для любых модели Крипке M и предиката C преобразователь $\mathbb{f} = \lambda Z. C \cap \mathbf{EX}_M(Z)$ является монотонным

Доказательство.

Рассмотрим предикаты A и B , такие что $A \subseteq B$, и покажем, что $\mathbb{f}(A) \subseteq \mathbb{f}(B)$, то есть что для любого состояния $s \in \mathbb{f}(A)$ верно $s \in \mathbb{f}(B)$

Так как $s \in \mathbb{f}(A)$, верно $s \in C$ и $s \in \mathbf{EX}_M(A)$

$s \in \mathbf{EX}_M(A)$ означает, что существует состояние s' , такое что $s' \in A$ и $s \rightarrow s'$

Так как $A \subseteq B$, верно и $s' \in B$

Значит, $s \in \mathbf{EX}_M(B)$, и следовательно, $s \in C \cap \mathbf{EX}_M(B) = \mathbb{f}(B)$ ▼

Преобразователь EG_M

Лемма. Для любых модели Крипке M и ctl-формулы φ предикат $Sat_M(EG\varphi)$ является неподвижной точкой преобразователя $\lambda Z. Sat_M(\varphi) \cap EX_M(Z)$

Доказательство.

По определению неподвижной точки, достаточно показать равенство

$$Sat_M(EG\varphi) = Sat_M(\varphi) \cap EX_M(Sat_M(EG\varphi))$$

По определениям Sat_M и EX_M , достаточно показать равносильность

$$M, s \models EG\varphi \Leftrightarrow M, s \models \varphi \text{ и } M, s \models EXEG\varphi$$

По семантике ctl-формул,

- ▶ « $M, s \models EG\varphi$ » \Leftrightarrow в M из s исходит хотя бы один бесконечный путь s_1, s_2, \dots , такой что $M, s_1 \models \varphi, M, s_2 \models \varphi, \dots$
- ▶ « $M, s \models \varphi$ и $M, s \models EXEG\varphi$ » $\Leftrightarrow M, s \models \varphi$ и в M из s исходит хотя бы один бесконечный путь s_1, s_2, \dots , такой что $M, s_2 \models \varphi, M, s_3 \models \varphi, \dots$

Легко видеть, что последние два пункта равносильны ▼

Преобразователь EG_M

Лемма. Для любых конечной модели Крипке M и ctl -формулы φ предикат $Sat_M(EG\varphi)$ является наибольшей неподвижной точкой преобразователя $\lambda Z. Sat_M(\varphi) \cap EX_M(Z)$

Доказательство. Можете попробовать самостоятельно

Из последней леммы естественно вытекает альтернативный (по сравнению с базовым алгоритмом) вариант процедуры $\mathfrak{P}_{EG}(M, \varphi)$:

- ▶ Вычислить $X = Sat(M, \varphi) = \mathfrak{P}'_{sat}(M, \varphi)$
- ▶ Вернуть предикат $\mathfrak{P}_{gfp}(M, \lambda Z. X \cap EX_M(Z))$

Эту процедуру несложно представить символьно ($\mathfrak{F}_{EG}(\mathfrak{M}, \varphi)$):

- ▶ Вычислить $\Phi_X = \mathfrak{F}'_{sat}(\mathfrak{M}, \varphi)$
- ▶ Вернуть представление $\mathfrak{F}_{gfp}(\mathfrak{M}, \lambda Z. \Phi_X \& EX_{\mathfrak{M}}(Z))$

Преобразователь EU_M

Лемма. Для любых модели Крипке M и ctl-формул φ и ψ предикат $Sat_M(\mathbf{E}(\varphi \mathbf{U} \psi))$ является неподвижной точкой преобразователя $\lambda Z. Sat_M(\psi) \cup (Sat_M(\varphi) \cap \mathbf{EX}_M(Z))$

Доказательство.

По определению неподвижной точки, достаточно показать равенство $Sat_M(\mathbf{E}(\varphi \mathbf{U} \psi)) = Sat_M(\psi) \cup (Sat_M(\varphi) \cap \mathbf{EX}_M(Sat_M(\mathbf{E}(\varphi \mathbf{U} \psi))))$

По определениям Sat_M и \mathbf{EX}_M , достаточно показать равносильность $M, s \models \mathbf{E}(\varphi \mathbf{U} \psi) \Leftrightarrow M, s \models \psi$ или $(M, s \models \varphi$ и $M, s \models \mathbf{EXE}(\varphi \mathbf{U} \psi))$

Аналогично доказательству такой же леммы для $\mathbf{EG}\varphi$, легко видеть, что эта равносильность действительно справедлива ▼

Лемма. Для любых конечной модели Крипке M и ctl-формул φ и ψ предикат $Sat_M(\mathbf{E}(\varphi \mathbf{U} \psi))$ является наименьшей неподвижной точкой преобразователя $\lambda Z. Sat_M(\psi) \cup (Sat_M(\varphi) \cap \mathbf{EX}_M(Z))$

Доказательство. Можете попробовать самостоятельно

Преобразователь \mathbf{EU}_M

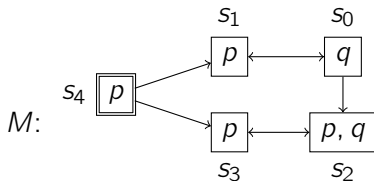
Из последней леммы естественно вытекает альтернативный (по сравнению с базовым алгоритмом) вариант процедуры $\mathfrak{P}_{\mathbf{EU}}(M, \varphi, \psi)$:

- ▶ Вычислить $X = \text{Sat}(M, \varphi) = \mathfrak{P}'_{\text{sat}}(M, \varphi)$ и $Y = \text{Sat}'(m, \psi) = \mathfrak{P}'_{\text{sat}}(M, \psi)$
- ▶ Вернуть предикат $\mathfrak{P}_{\text{ifp}}(M, \lambda Z. Y \cup (X \cap \mathbf{EX}_M(Z)))$

Эту процедуру несложно представить символьно ($\mathfrak{F}_{\mathbf{EU}}(\mathfrak{M}, \varphi, \psi)$):

- ▶ Вычислить $\Phi_X = \mathfrak{F}'_{\text{sat}}(\mathfrak{M}, \varphi)$ и $\Phi_Y = \mathfrak{F}'_{\text{sat}}(\mathfrak{M}, \psi)$
- ▶ Вернуть представление $\mathfrak{F}_{\text{ifp}}(\mathfrak{M}, \lambda Z. \Phi_Y \vee (\Phi_X \& \mathbf{EX}_{\mathfrak{M}}(Z)))$

Символьный алгоритм: пример



$$\varphi = \mathbf{EX}p \ \& \ \neg \mathbf{E}(q \mathbf{UEG} p)$$

Для начала проиллюстрируем модифицированный базовый алгоритм

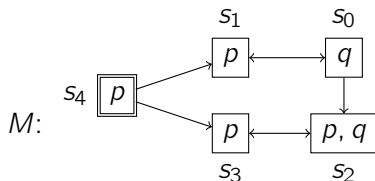
Начало — такое же, как в исходном базовом алгоритме:

$$\text{Sat}_M(p) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$\text{Sat}_M(\mathbf{EX}p) = \text{Pre}(\text{Sat}(M, p)) = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$$

$$\text{Sat}_M(q) = \{s_0, s_2\}$$

Символьный алгоритм: пример



$$\varphi = \mathbf{EX}p \ \& \ \neg \mathbf{E}(q \mathbf{UEGP})$$

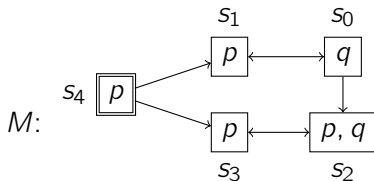
Преобразователь для $\mathbf{EG}p$:

$$f_1 = \lambda Z. \text{Sat}_M(p) \cap \mathbf{EX}_M(Z) = \lambda Z. \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap \text{Pre}(M, Z)$$

Вычисление наибольшей неподвижной точки f_1 :

- ▶ $X_0 = S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$
- ▶ $X_1 = f_1(X_0) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap \text{Pre}(M, S) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
- ▶ $X_2 = f_1(X_1) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap \{s_0, s_2, s_3, s_4\} = \{s_2, s_3, s_4\}$
- ▶ $X_3 = f_1(X_2) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \cap \{s_0, s_2, s_3, s_4\} = \{s_2, s_3, s_4\} = X_2$
- ▶ $\text{Sat}_M(\mathbf{EG}p) = \nu Z. f_1(Z) = X_3 = \{s_2, s_3, s_4\}$

Символьный алгоритм: пример



$$\varphi = \mathbf{EX}p \ \& \ \neg \mathbf{E}(q \mathbf{UEGP})$$

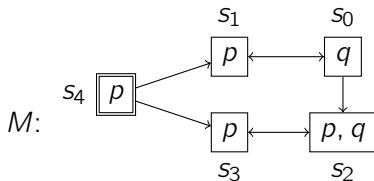
Преобразователь для $\mathbf{E}(q \mathbf{UEGP})$:

$$\begin{aligned} f_2 &= \lambda Z. \text{Sat}_M(\mathbf{EG}p) \cup (\text{Sat}_M(q) \cap \mathbf{EX}_M(Z)) = \\ & \lambda Z. \{s_2, s_3, s_4\} \cup (\{s_0, s_2\} \cap \mathbf{EX}_M(Z)) \end{aligned}$$

Вычисление наименьшей неподвижной точки f_2 :

- ▶ $X_0 = \emptyset$
- ▶ $X_1 = f_2(X_0) = \{s_2, s_3, s_4\} \cup (\{s_0, s_2\} \cap \emptyset) = \{s_2, s_3, s_4\}$
- ▶ $X_2 = f_2(X_1) = \{s_2, s_3, s_4\} \cup (\{s_0, s_2\} \cap \{s_0, s_2, s_3, s_4\}) = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$
- ▶ $X_3 = f_2(X_2) = \{s_2, s_3, s_4\} \cup (\{s_0, s_2\} \cap \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}) = \{s_0, s_2, s_3, s_4\} = X_2$
- ▶ $\text{Sat}_M(\mathbf{E}(q \mathbf{UEGP})) = \mu Z. f_2(Z) = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$

Символьный алгоритм: пример



$$\varphi = \mathbf{EX}p \ \& \ \neg \mathbf{E}(q \mathbf{UEG} p)$$

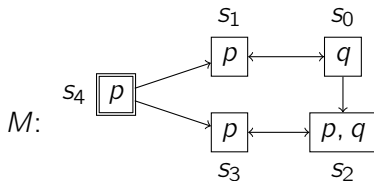
Конец — такой же, как в исходном базовом алгоритме

$$\text{Sat}_M(\neg \mathbf{E}(q \mathbf{UEG} p)) = S \setminus \text{Sat}_M(\mathbf{E}(q \mathbf{UEG} p)) = \{s_1\}$$

$$\text{Sat}_M(\varphi) = \text{Sat}_M(\mathbf{EX}p) \cap \text{Sat}_M(\neg \mathbf{E}(q \mathbf{UEG} p)) = \emptyset$$

Так как $\{s_4\} \not\subseteq \emptyset$, можно заключить, что $M \not\models \varphi$

Символьный алгоритм: пример



$$\varphi = \mathbf{EX}p \& \neg \mathbf{E}(q \mathbf{UEG} p)$$

Символьное представление модели M , основанное на формулах, для трёх разрядов, отвечающих переменным x_0, x_1, x_2 , с естественным кодированием состояний согласно номерам выше:

- ▶ $\Phi_S = x_2 \rightarrow \neg x_1 \& \neg x_0$
- ▶ $\Phi_{S_0} = x_2 \& \neg x_1 \& \neg x_0$
- ▶ $\Phi_{\rightarrow} = \Phi_S \& \neg x'_2 \& ((x_1 \leftrightarrow x'_1) \& (x_0 \oplus x'_0)) \vee \neg x_1 \& \neg x_0 \& x'_1 \& \neg x'_0$
- ▶ $\Phi_p = \Phi_S \& (x_2 \vee x_1 \vee x_0)$
- ▶ $\Phi_q = \neg x_2 \& \neg x_0$

А переписать результаты работы модифицированного базового алгоритма в символьном виде можете попробовать сами