Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики»

1. Общая информация (учебная нагрузка, формы контроля и др.)

Курс является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений».

Курс читается в 7 семестре в объёме 2 часов лекций и 2 часов семинарских занятий в неделю. Курс завершается экзаменом, на который выносятся теоретические вопросы, изложенные на лекциях, и задачи, рассмотренные на семинарах.

В разделах 2–6, 9 приведена подробная информация о содержании курса и программе в 2022–2023 уч. году, в разделах 7 и 8 — о контроле и проверочных работах.

В течение семестра по курсу проводятся 3 проверочные работы (по 2 часа каждая). По результатам проверочных работ с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах выставляется предварительная оценка, которая влияет на оценку на экзамене (см. раздел 8).

Курс читают сотрудники кафедры математической кибернетики; лекторы 2022-2023 учебного года — проф. Селезнева Светлана Николаевна (selezn@cs.msu.ru), проф. Ложкин Сергей Андреевич (lozhkin@cs.msu.ru), к.ф.-м.н. Савицкий Игорь Владимирович (savvvig@gmail.com).

2. Аннотация

Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» продолжает курсы «Дискретная математика» и «Основы кибернетики» и посвящён рассмотрению классических вычислительных моделей в теории алгоритмов, связанных с распознаванием множеств и вычислением функций, элементам теории сложности алгоритмов и теории дискретных управляющих систем.

В курсе изучаются модели конечных автоматов (распознавателей и преобразователей) и машин Тьюринга, рассматривается техника преобразований этих устройств и вычислений на этих устройствах. Для каждого из устройств приводится эквивалентный алгебраический формализм: правоинвариантные отношения эквивалентности, регулярные выражения, функциональная система с операциями суперпозиции и введения обратной связи над автоматными функциями, формализм Клини для класса частично-рекурсивных функций. Для каждого из случаев доказывается эквивалентность алгебраического и автоматного (машинного) подходов к определению класса множеств или функций. Рассматриваются классы сложности P и NP, доказывается полиномиальная разрешимость и устанавливается NP-полнота ряда задач. Информация о содержании третьей части курса появится позднее.

3. Программа

I. Конечные автоматы

Конечные автоматы-распознаватели и конечно-автоматные множества слов, задание автоматов диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Правоинвариантное отношение эквивалентности, его связь с конечно-автоматными множествами. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. Недетерминированные автоматы, процедура детерминизации. Операции произведения и итерации, замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. Регулярные выражения и регулярные множества, совпадение классов регулярных и конечно-автоматных множества.

Детерминированные функции. Конечные автоматы-преобразователи, их задание диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. Зависимость с запаздыванием, операция введения обратной связи, замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции введения обратной связи. Схемы из автоматных элементов, реализация конечно-автоматных функций схемами из автоматных элементов. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций.

II. Машины Тьюринга, рекурсивные функции и классы сложности

Машины Тьюринга, функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. Моделирование машин Тьюринга. Существование универсальной машины Тьюринга.

Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации над частичными функциями. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относительно операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно-рекурсивные функции, примитивная рекурсивность простейших арифметических функций. Частично-рекурсивные функции, примеры не всюду определенных частично-рекурсивных функций. Совпадение класса частично-рекурсивных функций с классом функций, вычислимых на машинах Тьюринга, теорема Клини.

Классы сложности P и NP. Полиномиальная сводимость, NP-полнота. NP-полнота задачи о выполнимости КНФ и задачи о выполнимости 3-КНФ. Полиномиальная разрешимость задачи о выполнимости 2-КНФ.

Программа третьей части курса

4. Предварительный список вопросов к экзамену по курсу «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (осенний семестр 2022-2023 уч. года; 411–419 группы)

I. Конечные автоматы

1. Конечный автомат-распознаватель, конечно-автоматное множество. [1, с. 27-28]
2. Правоинвариантное отношение эквивалентности, связь с конечно-автоматными множествами. [1, с. 29–31]
3. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. [1, с. 32–33]
4. Недетерминированные автоматы, процедура детерминизации. [1, с. 34–36]
5. Операции произведение и итерации. Замкнутость конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. [1, с. 37–39]
6. Регулярные выражения и регулярные множества. [1, с. 40]
7. Теорема Клини. [1, с. 40–42]
8. Детерминированные функции. Конечный автомат-преобразователь. Канонические уравнения, векторная и скалярная формы канонических уравнений. [1, с. 44-45], [2, с. 74–77, 88–91]
9. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. [2, с. 92–94], [1, с. 57–59]
10. Зависимость с запаздыванием. Операция введения обратной связи. [2, с. 94–96, 98–102]
11. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций. [2, с. 105–108], [1, с. 60-61]

II. Машины Тьюринга, рекурсивные функции и классы сложности

12. Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. [1, с. 65–68]
13. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. [1, с. 70–72]
14. Моделирование машин Тьюринга. [1, с. 74–77]
15. Универсальная машина Тьюринга. [1, с. 84–86]
16. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. [1, с. 77–79]
17. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относительно операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. [1, с. 80–83]
18. Класс примитивно-рекурсивных функций. Простейшие примитивно-рекурсивные функции. [1, с. 102–105]
19. Класс частично-рекурсивных функций. Примеры частично-рекурсивных функций. [1, с. 79, 108-109]
20. Частичная рекурсивность вычислимых функций. Формула Клини. [1, с. 114–117]

21. Классы P и NP. Примеры задач из класса NP. [1, с. 89–93], [3, с. 46–49]

22. NP-полнота. Теорема Кука. [1, с. 95–99], [3, с. 49–54]

23. NP-полнота задачи 3-ВЫП. [1, с. 99-100], [3, с. 54–56]

24. Полиномиальная разрешимость задачи 2-ВЫП. [1, с. 101-102], [4, с. 16–17]

Вопросы третьей части курса.

5. Типовые задачи к экзамену

I. Задачи по конечным автоматам

1. Построить диаграмму Мура конечного автомата, распознающего заданное множество.
2. Используя правоинвариантное отношения эквивалентности, доказать, что заданное множество не является конечно-автоматным.
3. Построить регулярное выражение, определяющее заданное множество.
4. Построить диаграмму Мура конечного автомата, реализующего заданную функцию.
5. По диаграмме Мура построить канонические уравнения и схему в стандартном автоматном базисе.
6. По схеме в стандартном автоматном базисе построить канонические уравнения и диаграмму Мура.
7. Доказать полноту (относительно операций суперпозиции и обратной связи) заданного множества автоматных функций.

II. Задачи по машинам Тьюринга, рекурсивным функциям и классам сложности

8. Построить машину Тьюринга, вычисляющую заданную функцию или выполняющую заданное преобразование.
9. Доказать примитивную рекурсивность заданной функции.
10. Применить операцию минимизации к заданной (частичной) функции.
11. Доказать частичную рекурсивность заданной функции.
12. Доказать принадлежность к классу P заданного множества или задачи.
13. Доказать принадлежность к классу NP заданного множества или задачи.
14. Провести полиномиальное сведение заданной КНФ к 3-КНФ, сохраняющее выполнимость.
15. Применить полиномиальный алгоритм проверки выполнимости к заданной 2-КНФ.

Задачи третьей части курса

Литература

1. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 133 с.
   https://mk.cs.msu.ru/images/2/25/ИзбрГлавыДискрМатем_2015.pdf

2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.

3. Алексеев В. Б. Введение в теорию сложности алгоритмов. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 2002. — 82 с.
   https://mk.cs.msu.ru/images/c/c4/KNIGA1.pdf

4. Сапоженко А. А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. — М.: Изд-во МГУ, 2001. — 46 с.
   https://mk.cs.msu.ru/images/e/e8/Sapozhenko_alg.pdf (номера страниц не соответствуют печатному изданию)

5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.

6. О контроле аудиторной и самостоятельной работы студентов

Курс предполагает самостоятельную работу студентов, в частности, выполнение домашних заданий и проработку материала, пройденного лекциях и семинарах.

В течение семестра проводятся 3 проверочные работы по курсу. Эти работы призваны проверить умение решать задачи и понимание определений и утверждений курса. Проверочные работы проводятся в рамках семинарских занятий, по одной работе на 2 ч по каждому из трёх разделов курса.

Планируется осуществлять систематический (выборочный) контроль за работой студентов как на семинарах, так и на лекциях.

7. О проведении экзамена

По результатам проверочных с учётом посещаемости и работы на лекциях и семинарах, а также самостоятельной работы каждому студенту выставляется предварительная оценка.

Студенты с предварительной оценкой «5», а также с предварительными оценками «4» и «3», не претендующие на их повышение, сдают экзамен в упрощённой форме.

Студенты с предварительными оценками «4» и «3», претендующие на их повышение, сдают экзамен устно (получают билет, в котором 2 теоретических вопроса и 1 задача из трёх различных разделов курса).

Студенты с предварительной оценкой «2» сдают экзамен в виде письменной работы. Задания включают и теоретические вопросы, и задачи.

Итоговая экзаменационная оценка не может отличаться от предварительной оценки больше, чем на 1 балл.

8. Планы семинарских занятий на осенний семестр 2022–2023 уч. года

Семинар 1.

Множества, допускаемые конечными автоматами. Правоинвариантная эквивалентность. Теоретический материал [1, с. 27–31].

В классе.

Задачи из приложения 1: 1 (1, 2, 4, 6, 9), 2 (1, 3, 4), 3 (1, 3, 5), 4, 5 (1, 3).

На дом.

Задачи из приложения 1: 1 (3, 5, 7, 10), 2 (2, 5), 3 (4, 6), 5 (2, 4).

Семинар 2.

Теоретико-множественные операции над конечно-автоматными множествами. Недетерминированные автоматы. Операции произведения и итерации. Теоретический материал [1, с. 32–39].

В классе.

Задачи из приложения 1: 8, 10 (1), 11 (1), 12 (1, 3), 23 (1), 24 (1), 13, 14.

На дом.

Задачи из приложения 1: 9, 10 (2), 11 (2), 12 (2), 23 (2), 24 (2), 15.

Семинар 3.

Регулярные выражения и регулярные множества. Теорема Клини. Теоретический материал [1, с. 40–42].

В классе.

Задачи из приложения 1: 16 (1, 3, 5), 17 (1), 18, 20, 22.

На дом.

Задачи из приложения 1: 16 (2, 4, 6), 17 (2), 19, 21.

Семинар 4.

Детерминированные функции. Построение диаграмм Мура и канонических уравнений. Операции суперпозиции и обратной связи. Построение схем из автоматных элементов. Полнота систем ограниченно-детерминированных функций. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе.

Из [5, глава IV]: 1.1 (1, 8), 1.2 (1), 2.1 (1, 16), 2.8 (6), 2.9 (4), 2.13 (4), 2.14 (1), 2.17 (1, 4).
В условии 2.17 (4) ошибка. Правильный вид функций: $f_1\colon y(t) = \overline{x}(t),\ t \geqslant 1$

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \vee x_3(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x_2(t) \cdot x_3(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

На дом.

Из [5, глава IV]: 1.1 (4, 6), 1.2 (2), 2.1 (3, 7), 2.8 (5), 2.9 (5), 2.13 (6), 2.14 (2), 2.17 (2, 5).

Семинар 5.

Проверочная работа по конечным автоматам.

Семинар 6.

Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе.

Из [5, глава V]: 1.8 (1, 3), 1.4 (2); 1.14 (1, 2, 3, 4, 9, 10), 1.15 (2, 7).

На дом.

Из [5, глава V]: 1.8 (2, 6), 1.4 (4), 1.14 (5, 6, 7, 12), 1.15 (4, 6).

Семинар 7.

Примитивно-рекурсивные функции. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 78].

В классе.

Из [5, глава V]: 2.1 (9, 10, 12), 2.2 (1, 3); применить операцию примитивной рекурсии к частичным функциям $g(x) = 2x$ и $h(x, y, z) = z - 2$; 2.3 (9, 10, 5), 2.4 (1, 2, 5, 7б).

На дом.

Из [5, глава V]: 2.1 (2, 4), 2.4 (3, 7а), 2.3 (7, 8, 9).

Семинар 8.

Операции ограниченного суммирования и мультиплицирования. Операция минимизации. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 102–107].

В классе.

Используя операции $\prod_{i\leqslant x}$ и $\sum_{i\leqslant x}$ доказать примитивную рекурсивность функций $\lfloor x/y \rfloor$, $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\lfloor \log_a x \rfloor$, «число делителей x», «число решений полиномиального уравнения в заданном промежутке».

Из [5, глава V]: 2.5 (1, 2, 3, 7, 11), 2.7 (2, 6).

На дом.

Используя операции $\prod_{i\leqslant x}$ и $\sum_{i\leqslant x}$ доказать примитивную рекурсивность функций $p(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, где

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — простое число.} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$f_1(x)$ — количество чисел вида y^y на отрезке $[0, x]$. $f_2(x)$ — количество чисел вида $2^y \cdot 3^z$ на отрезке $[0, x]$.

Из [5, глава V]: 2.5 (4, 10, 13), 2.7 (3, 5).

Семинар 9.

Частично-рекурсивные функции. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 108–113].

В классе.

Из [5, глава V]: 2.8 (1, 2, 5).

Задачи из приложения 2: 2, 3, 5, 7, 8, 10.

На дом.

Из [5, глава V]: 2.8 (3).
Задачи из приложения 2: 1, 4, 6, 9, 11.

Семинар 10.

Классы сложности. Теоретический материал [1, с. 89–102], [3, с. 46–56], [4, с. 16–17].

В классе.

Задачи из приложения 3: 1(1, 3, 5, 7), 2(1, 3), 3(2, 3), 4(1, 3), 5(1, 3), 6(2, 4).

На дом.

Задачи из приложения 3: 1(2, 4, 6, 8), 2(2, 4), 3(1, 4), 4(2, 4), 5(2, 4), 6(1, 3).

Семинар 11.

Проверочная работа по вычислимым функциям.

Семинар 12.

Занятие по третьей части.

Семинар 13.

Занятие по третьей части.

Семинар 14.

Занятие по третьей части.

Приложение 1: задачи к семинарам по автоматам-распознавателями

1. Построить диаграмму Мура для автомата в алфавите $\{1, 0\}$, который допускает следующее множество:

    1) (a) Множество $\{0, 1, \Lambda\}$; (b) Множество $\{0, 1\}^* \setminus \{0, 1, \Lambda\}$;
    2) Все слова, которые начинаются словом 01;
    3) Все слова, которые оканчиваются словом 101;
    4) Все слова длины 3 и слово 0;
    5) Все слова длины 3, кроме слова 110;
    6) Все слова, которые содержат слово 001;
    7) Все слова, которые составлены из «блоков» 011 и 101;
    8) Все слова, имеющие нечётную длину, и слово 11;
    9) Все слова, которые имеют вхождения хотя бы одного из слов 000 и 111;
    10) Все слова, у которых за каждым символом 1 следуют как минимум два символа 0.

2. Доказать конечную автоматность следующих множеств:

    1) Любое конечное множество X в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и множество $A^* \setminus X$;
    2) Множество всех слов вида a_i^n $(1 \leqslant i \leqslant m,\ n = 1, 2, \ldots)$ в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$;
    3) Множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые имеют чётную длину, начинаются символом 0 и оканчиваются символом 1;

4) Множество всех слов в алфавите $\{0,1\}$, которые содержат неперекрывающиеся вхождения слов 001 и 011;

5) Множества вида $0^{n_1}10^{n_2}1\ldots10^{n_k}$, где $n_1,\ldots,n_k \geqslant 1$
(a) При каждом фиксированном k; (b) При произвольном k.

6) Множества слов вида $(10^{m_1}1)^{n_1}0(10^{m_2}1)^{n_2}0\ldots(10^{m_k}1)^{n_k}$,
где $m_1,\ldots,m_k \geqslant 2$, $n_1,\ldots,n_k \geqslant 1$ и число k фиксировано.

3. Определить на множестве $\{0,1\}^*$ правоинвариантное отношение эквивалентности конечного индекса, для которого следующие множества будут представимы в виде объединения некоторого числа классов эквивалентности:

    1) $\{\Lambda\}$;
    2) $\{0\}$;
    3) $\{\Lambda, 0, 1\}$;
    4) Множество всех слов вида 0^{3n}, где $n \geqslant 1$;
    5) Множество всех слов вида 0^n1, где $n \geqslant 0$;
    6) Множество всех слов чётной длины (включая пустое слово) вместе со словами 1 и 111.

4. Для любого $n \geqslant 2$ определить на множестве $\{0,1\}^*$ правоинвариантное отношение эквивалентности индекса n.

5. Пользуясь правоинвариантным отношением эквивалентности доказать, что следующие множества не являются конечно-автоматными:

    1) $\{0^n1^{2n} \colon n = 1,2,\ldots\}$;
    2) $\{0^n10^n \colon n = 1,2,\ldots\}$;
    3) Множество всех симметричных слов в алфавите $\{0,1\}$;
    4) $\{0^{n^2} \colon n = 1,2,\ldots\}$;
    5) $\{0^n1^n0^n \colon n = 1,2,\ldots\}$.

6. Существует ли бесконечное конечно-автоматное множество X такое, что множество $\{\bar{a}\bar{a} \colon \bar{a} \in X\}$ конечно-автоматно?

7. (*) По аналогии с правоинвариантным отношением эквивалентности определим на множестве A^* левоинвариантное отношение эквивалентности: если $\bar{a} \sim \bar{b}$ и $\bar{c}$ — произвольное слово из A^*, то $\bar{c}\bar{a} \sim \bar{c}\bar{b}$.

    Будет ли для левоинвариантного отношения эквивалентности справедлив аналог теоремы (из лекций) о представлении произвольного конечно-автоматного множества в виде объединения некоторого количества классов левоинвариантного отношения эквивалентности конечного индекса?

8. Ввести операцию прямого произведения автоматов. С использованием этой операции доказать замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций объединения и пересечения.

9. Выяснить, сохраняют ли операции $\cup$, $\cap$, $\cdot$, $*$ класс всех множеств, которые не являются конечно-автоматными?

10. Какие множества допускают следующие недетерминированные автоматы (предварительно построить для них диаграммы Мура):

1)

$$
\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1, q_2\},\\
&f(0, q_2) = \{q_3\}, \quad f(1, q_2) = \{q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_2, q_3\},\\
&F = \{q_3\}.
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1\},\\
&f(0, q_2) = \{q_2\}, \qquad\ \ f(1, q_2) = \{q_2, q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_1, q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_1, q_3\},\\
&F = \{q_3\}.
\end{aligned}
$$

11. Для заданных недетерминированных автоматов методом детерминизации построить эквивалентный детерминированный автомат. Можно давать любые автоматы, в том числе, автоматы из задачи 10:

    1)

$$
\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1, q_2\},\\
&f(0, q_2) = \{q_3\}, \quad f(1, q_2) = \{q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_2, q_3\},\\
&F = \{q_3\};
\end{aligned}
$$

    2)

$$
\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1\},\\
&f(0, q_2) = \{q_2\}, \qquad\ \ f(1, q_2) = \{q_2, q_3\},\\
&f(0, q_3) = \{q_1, q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_1, q_3\},\\
&F = \{q_3\}.
\end{aligned}
$$

12. Пусть $\mathcal{A}_i = \{A, Q, f, q_1, F_i\}, i = 1, 2, 3$ (недетерминированные автоматы). Верно ли, что

    1) При $F_2 = Q \setminus F_1$ выполнено $D(\mathcal{A}_2) = A^* \setminus D(\mathcal{A}_1)$;
    2) При $F_3 = F_1 \cup F_2$ выполнено $D(\mathcal{A}_3) = D(\mathcal{A}_1) \cup D(\mathcal{A}_2)$;
    3) При $F_3 = F_1 \cap F_2$ выполнено $D(\mathcal{A}_3) = D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2)$.

13. Отправляясь от множеств $\{0\}$ и $\{1\}$, построить с помощью операций объединения, произведения и итерации множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые содержат подслово 0001.

14. Пусть $\bar{a}$ — слово в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Сколько раз нужно применить операцию итерации, чтобы получить множество $A^* \setminus \{\bar{a}\}$ из множеств $\{a_1\}, \ldots, \{a_m\}$ с помощью операций объединения, произведения и итерации?

15. Пусть множество X состоит из n слов. Может ли множество $X \cdot X$ содержать больше n^2 слов? Меньше n^2 слов? В точности n^2 слов?

16. Доказать регулярность следующих множеств слов в алфавите $\{0, 1\}$:

    1) Любое конечное множество слов и дополнение (до множества $\{0, 1\}^*$) к конечному множеству слов;
    2) Множество всех слов, представимых в виде произведения заданных слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$;
    3) Множество всех слов, содержащих в качестве подслова одно из слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$;
    4) Множество всех слов, длины которых имеют вид $5k + 1$ или $5k + 3$;
    5) Множество всех слов, которые не содержат слово 01;
    6) Множество всех слов, которые не содержат ни одно из заданных слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ (использовать теорему Клини).

17. Привести пример бесконечного регулярного множества, которое невозможно получить:

    1) С однократным использованием операции $*$;
    2) С n-кратным использованием операции $*$, $n \geqslant 2$.

18. Пусть X — регулярное множество в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$, $Y_1, \ldots, Y_m$ — произвольные регулярные множества. Доказать, что множество $S^{a_1 \ldots a_m}_{Y_1 \ldots Y_m} X$, полученное в результате одновременной замены букв $a_1, \ldots, a_m$ в любом слове из X множествами $Y_1, \ldots, Y_m$, является регулярным множеством.

19. Пусть X — множество в алфавите A, B — непустое подмножество A. Обозначим через $\mathrm{Proj}_B(X)$ множество всех слов, которые можно получить из слов множества X вычёркиванием букв множества $A \backslash B$ (если слово не содержит букв из B, то в результате вычеркивания образуется пустое слово). Доказать, что для регулярного множества X множество $\mathrm{Proj}_B(X)$ также регулярно.

20. Пусть X — регулярное множество, $\mathrm{Rev}(X)$ — множество обращений всех слов из X (т.е. слов, прочитанных справа налево). Доказать, что множество $\mathrm{Rev}(X)$ регулярно.

21. Пусть X, Y — множества слов в алфавите A. Обозначим через $X \times Y$ множество всех слов в алфавите $A \times A$, которые имеют вид $(a_{i_1} a_{j_1})(a_{i_2} a_{j_2}) \ldots (a_{i_n} a_{j_n})$, где $a_{i_1} \ldots a_{i_n} \in X$ и $a_{j_1} \ldots a_{j_n} \in Y$. С использованием теоремы Клини доказать, что для любых регулярных множеств X, Y множество $X \times Y$ также регулярно.

22. Пусть X — конечно-автоматное множество в алфавите A, Y — конечно-автоматное множество в однобуквенном алфавите. Обозначим через X/Y множество всех тех слов из X, длины которых являются длинами слов из Y. Доказать, что множество X/Y конечно-автоматно.

23. Для автоматов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ построить (недетерминированный) автомат, который допускает множество $D(\mathcal{A}) \cdot D(\mathcal{B})$:

    1)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\}, \\
&f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_1, \\
&f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_3, \\
&f(0, q_3) = q_1, \quad f(1, q_3) = q_3, \\
&F = \{q_1, q_3\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}\colon Q = \{q_1, q_2\},\\
&f(0, q_1) = q_1, \quad f(1, q_1) = q_2,\\
&f(0, q_2) = q_1, \quad f(1, q_2) = q_2,\\
&F = \{q_2\};
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\colon Q = \{q_1, q_2\},\\
&f(0, q_1) = q_1, \quad f(1, q_1) = q_2,\\
&f(0, q_2) = q_1, \quad f(1, q_2) = q_2,\\
&F = \{q_2\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_3,\\
&f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_2,\\
&f(0, q_3) = q_3, \quad f(1, q_3) = q_1,\\
&F = \{q_2, q_3\}.
\end{aligned}$$

24. Для автомата $\mathcal{A}$ построить (недетерминированный) автомат $\mathcal{C}$, у которого $D(\mathcal{C}) = D(\mathcal{A})^*$:

   1) Автомат $\mathcal{A}$ из задачи 23 (1):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_1,\\
&f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_3,\\
&f(0, q_3) = q_1, \quad f(1, q_3) = q_3,\\
&F = \{q_1, q_3\};
\end{aligned}$$

   2) Автомат $\mathcal{B}$ из задачи 23 (2):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_3,\\
&f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_2,\\
&f(0, q_3) = q_3, \quad f(1, q_3) = q_1,\\
&F = \{q_2, q_3\}.
\end{aligned}$$

Приложение 2: задачи к семинарам по частично рекурсивным функциям

Доказать частичную рекурсивность функций:

1. $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ входит в пересечение областей значений} \\ & \text{примитивно-рекурсивных функций } g_1(z), g_2(z), \\ \text{не определено}, & \text{иначе}; \end{cases}$

2. $f^{-1}(x)$, где f — общерекурсивная перестановка (биективная функция) на $\mathbb{N}_0$;

3. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \{a_1, \ldots, a_m\}, \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases} \quad a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0;$

4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ входит в область значений функции } g, \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases}$

   $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, например, $z^2, 2^z$;

5. $f(x) = \begin{cases} x, & f_1(x) \geqslant f_2(x), \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases}$

   $f_1(x), f_2(x)$ — примитивно-рекурсивные функции;

6. $x - y$;

7. x/y;

8. $\sqrt{x}$;

9. $\log_2 x$;

10. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть две единицы на расстоянии } x+1, \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases}$

    $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения $0, 1$ (двоичная последовательность);

11. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть } x+1 \text{ идущих подряд единиц}, \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases}$

    $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения $0, 1$ (двоичная последовательность).

Приложение 3: задачи к семинарам по классам сложности

1. Пусть *входом* задачи L является слово $\alpha \in A^*$, где $A = \{0, 1\}$. Докажите, что задача L принадлежит классу P, если *вопрос* этой задачи следующий:

   1) верно ли, что число единиц слова α делится на 3;

   2) верно ли, что длина слова α нечетна;

   3) верно ли, что слово α не содержит подслово 101;

   4) верно ли, что слово α не является записью степени двойки в двоичной системе счисления;

   5) верно ли, что слово α является палиндромом;

   6) верно ли, что слово α содержит равное число нулей и единиц;

   7) верно ли, что в любой начальной части слова α число нулей не больше числа единиц;

   8) верно ли, что слово α является периодическим (т. е. что найдется такое слово $\beta \in A^*$, что $\alpha = \underbrace{\beta\beta\ldots\beta}_{n}$, где $n \geqslant 2$)?

   Постройте машину Тьюринга, решающую задачу L с полиномиальной сложностью; оцените полученную сложность $T(n)$.

2. Пусть $A = \{0, 1\}$ и $L \subseteq A^*$. Докажите, что множество (язык) L принадлежит классу P, если множество L содержит все слова из A^*, которые:

1) содержат не менее трех нулей;

2) содержат подслово 010;

3) являются векторами значений функций алгебры логики;

4) являются векторами значений функций алгебры логики, не сохраняющих 1.

Постройте машину Тьюринга, распознающую множество L с полиномиальной сложностью; оцените полученную сложность $T(n)$.

3. Пусть *входом* задачи L является КНФ K, записанная словом в известном конечном алфавите A. Докажите, что задача L принадлежит классу NP, если *вопрос* этой задачи следующий:

1) существует ли набор, на котором КНФ K равна 1;

2) существует ли набор, на котором КНФ K равна 0;

3) существуют ли два противоположных набора, на которых КНФ K принимает одинаковые значения;

4) существуют ли два соседних набора, на которых КНФ K принимает противоположные значения?

4. Пусть *входом* задачи L является граф $G = (V, E)$, заданный множеством вершин и множеством ребер, и число k. Докажите, что задача L принадлежит классу NP, если *вопрос* этой задачи следующий:

1) существует ли в графе G простой цикл, содержащий не менее k ребер;

2) существует ли в графе G полный подграф, содержащий не менее k вершин;

3) можно ли вершины графа G разбить на k множеств, чтобы не нашлось ребер, соединяющих вершины из одного множества;

4) можно ли в графе G удалить k ребер, чтобы остался несвязный граф?

5. По *входу* K задачи *ВЫП* постройте *вход* K' задачи 3-*ВЫП* в соответствиии с полиномиальным сведением первой задачи ко второй, если:

1) $K = (x_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)$;

2) $K = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)$;

3) $K = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_6)(\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6)$;

4) $K = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_6)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_6)(x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)$.

Покажите, как по набору, на котором выполняется КНФ K, построить набор, на котором выполняется КНФ K', и наоборот.

6. Полиномиальным алгоритмом проверьте выполнимость 2-КНФ K, если

1) $K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3)$;

2) $K = x_1(x_2 \vee \bar{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\bar{x}_4$;

3) $K = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3 \vee x_4)$;

4) $K = (x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee x_4)$.