Математическая логика

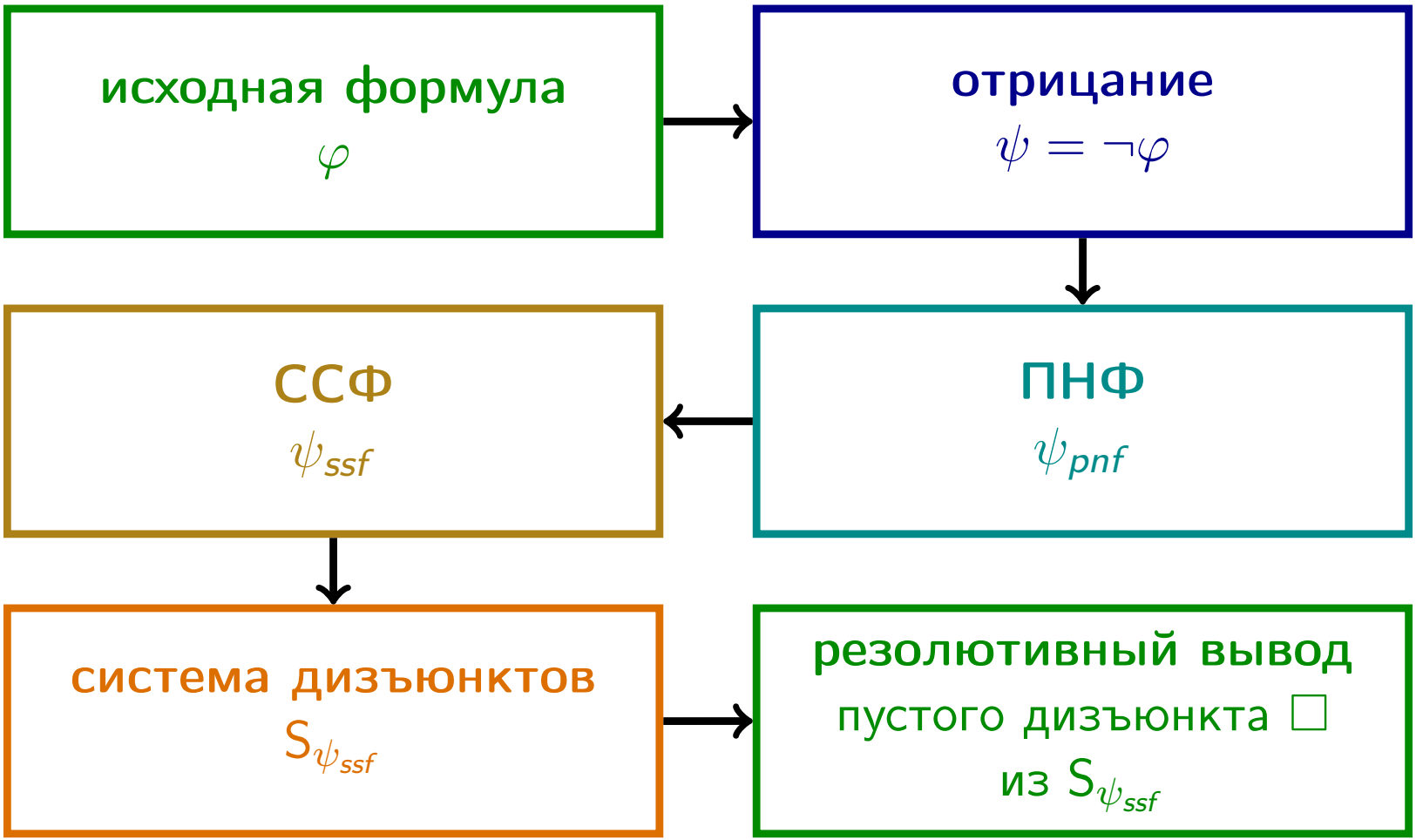
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 23

Обоснование общезначимости формулы методом резолюций (пример)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$\Rightarrow$ существует вывод $\square$ из $S_{\psi_{ssf}}$

Примеры, которые использовались при обсуждении этапов метода резолюций, выбирались так, чтобы при их совмещении получился сквозной пример: обоснование общезначимости формулы

$$\exists x\ (P(x)\ \&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

методом резолюций

Запишем получившееся обоснование от начала и до конца

Этап 1: поставить отрицание

$$\models \exists x\ (P(x)\ \&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists x\ (P(x)\ \&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\models \exists x\ (P(x)\ \&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists x\ (P(x)\ \&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

Этап 2: построить равносильную ПНФ

$$\neg\exists x\ (P(x)\ \&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$\sim$ (*переименование переменных*)

$$\neg\exists x\ (P(x)\ \&(\forall z\ P(z) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists u\ R(x,u))$$

$\sim$ (*удаление импликаций*)

$$\neg\exists x\ (\neg(P(x)\ \&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y))) \vee \exists u\ R(x,u))$$

$\sim$ (*продвижение отрицаний*)

$$\forall x\ (P(x)\ \&(\exists z\ \neg P(z) \vee \exists y\ R(x,y))\ \&\ \forall u\ \neg R(x,u))$$

$\sim$ (*вынесение кванторов*)

$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\ \&(\neg P(z) \vee R(x,y))\ \&\ \neg R(x,u))$$

$\sim$ (*получение КНФ*)

$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\ \&(\neg P(z) \vee R(x,y))\ \&\ \neg R(x,u))$$

$$\models \exists x\ (P(x)\ \&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\ \&(\neg P(z) \vee R(x,y))\ \&\ \neg R(x,u))$$

Этап 3: построить ССФ, применив алгоритм сколемизации

$$\not\models \forall x\ \underline{\exists z}\ \underline{\exists y}\ \forall u\ (P(x)\ \&(\neg P(\underline{z}) \vee R(x,\underline{y}))\ \&\ \neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\ \forall u\ (P(x)\ \&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\ \&\ \neg R(x,u))$$

Этап 4: перейти к системе дизъюнктов

$$\not\models \forall x\ \forall u\ (P(x)\ \&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\ \&\ \neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x), \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)), \neg R(x,u)\}$$

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\not\models \{P(x),\quad \neg P(\mathbf{f}(x))\vee R(x,\mathbf{g}(x)),\quad \neg R(x,u)\}$$

Этап 5: резолютивно вывести $\square$

$$P(x_1)\qquad \neg P(\mathbf{f}(x_2))\vee R(x_2,\mathbf{g}(x_2))\qquad R(x_3,\mathbf{g}(x_3))\qquad \neg R(x_4,u_4)\longrightarrow\square$$

Оказалось, что $\square$ резолютивно выводи́м из построенной системы дизъюнктов

Следовательно (по спектру доказанных ранее теорем), исходная формула
$$\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x)\to\exists y\,R(x,y))\to\exists y\,R(x,y))$$
общезначима