Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Вопрос 3

Билет 3
Логика 1-го порядка
Выполнимость и общезначимость
Общая схема метода резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Логика предикатов 1-го порядка (ЛП): алфавит

Базовые символы

Предметные константы

Ими обозначаются конкретные (именованные, фиксированные) предметы

Например: **я**, **2**, $\boldsymbol{\pi}$, **Солнце**, $\mathbf{c_1}$, ...

Const — множество всех констант

Предметные переменные

Ими обозначаются безымянные (нефиксированные) предметы

Они будут записываться привычно: x, y', z_4, ...

Var — множество всех переменных

Далее это множество полагается счётным и заданным однозначно

Логика предикатов 1-го порядка (ЛП): алфавит

Базовые символы

Функциональные символы

Ими обозначаются операции над предметами

Например: $+$, **сосед**, **lim**, ...

Каждому функциональному символу сопоставляется особое натуральное число — местность

$\mathbf{f}^{(k)}$ — запись функционального символа **f** с обозначением местности k

Func — множество всех функциональных символов с сопоставленными им местностями

Предикатные символы

Ими обозначаются отношения между предметами и свойства предметов

Например: $<$, **является_соседом**, **красный**, ...

При задании языка логики предикатов каждому предикатному символу сопоставляется особое натуральное число — местность

$\mathrm{P}^{(k)}$ — запись предикатного символа P с обозначением местности k

Pred — множество всех предикатных символов с сопоставленными им местностями

Логика предикатов 1-го порядка (ЛП): алфавит

Логические операции

$\boxed{\text{Логические связки}}$ $\quad \& \quad \vee \quad \neg \quad \rightarrow$

$\boxed{\text{Кванторы}}$

Квантор всеобщности («для любого предмета»): $\forall$
Квантор существования («существует предмет»): $\exists$

Знаки препинания $\quad (\quad) \quad ,$

Сигнатурой алфавита логики предикатов называется тройка

$$\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$$

Выбором сигнатуры определяется рассматриваемый вариант языка логики предикатов:

- Символы сигнатуры отвечают понятиям, высказывания о которых предполагается записывать на языке логики предикатов
- Символы, не входящие в сигнатуру, одинаковы для всех вариантов языка

ЛП: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики предикатов:

$$
\begin{array}{rcl}
t & ::= & \mathrm{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
\varphi & ::= & \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \mid \\
 & & (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid \\
 & & (\forall \mathrm{x}\, \varphi) \mid (\exists \mathrm{x}\, \varphi),
\end{array}
$$

где:

- φ — формула
- $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы
- $\mathrm{x} \in$ Var
- $\mathbf{c} \in$ Const
- $\mathbf{f}^{(n)} \in$ Func
- $\mathrm{P}^{(k)} \in$ Pred

ЛП: синтаксис

$$t \ ::= \ \mathtt{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

При помощи термов описываются предметы, получающиеся в результате применения заданных функций (операций) к заданным предметам

Term — множество всех термов

(*над заданными множествами* Var, Const, Func)

$\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — сокращённая запись последовательности «$\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$»

Если t — терм, то:

- Var_t — множество всех переменных, входящих в терм t
- $t(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — синоним t, если $\mathrm{Var}_t \subseteq \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}\}$

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

При помощи формул описываются отношения между предметами, строящиеся из «базовых» отношений при помощи логических операций

В некоторых случаях (*отношение местности 0*) формулой может описываться и высказывание, оцениваемое как истина или ложь

ЛП: синтаксис

Формула атомарна (является атомом), если имеет вид $\mathrm{P}(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, где $\mathrm{P}^{(k)} \in \mathsf{Pred}$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathsf{Term}$

Остальные формулы называются составными

Приоритет логических операций (в порядке убывания):

$$\forall,\ \exists,\ \neg;\ \text{затем}\ \&;\ \text{затем}\ \vee;\ \text{затем}\ \rightarrow$$

Как работают приоритеты (пример)

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x})\ \&\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \rightarrow \exists \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}))\ \&\ (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \rightarrow \exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$(\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})))\ \&(\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \rightarrow (\exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$

$$((\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})))\ \&(\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \rightarrow (\exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$

$$(((\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})))\ \&(\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \rightarrow (\exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))))$$

ЛП: синтаксис

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall x\ \varphi$ и $\exists x\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y(\forall x \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)) \to R(x))$$

ЛП: синтаксис

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall x\ \varphi$ и $\exists x\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y(\forall x \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)) \to R(x))$$

Переменная y связана квантором $\exists$

ЛП: синтаксис

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная x связана квантором $\forall$

ЛП: синтаксис

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}\underbrace{(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))}_{\text{Область действия квантора } \exists}$$

ЛП: синтаксис

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \underbrace{\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))}_{\text{Область действия квантора } \forall} \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

ЛП: синтаксис

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y} (\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанные вхождения переменной y

ЛП: синтаксис

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанное вхождение переменной x

ЛП: синтаксис

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall \mathrm{x}\ \varphi$ и $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Свободное вхождение переменной x

ЛП: синтаксис

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Если φ — формула, то:

- $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — синоним φ, если $\mathsf{Var}_\varphi \subseteq \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- если $\mathsf{Var}_\varphi = \emptyset$, то φ — замкнутая формула, или предложение

ЛП: семантика

Интерпретация (*сигнатуры* $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$) — это система $\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$, где:

- D — непустое множество предметов (область интерпретации; предметная область; универсум)
- $\overline{\mathrm{Const}} : \mathrm{Const} \to \mathrm{D}$ — оценка констант
- $\overline{\mathrm{Func}} : \mathrm{Func} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \mathrm{D})$ — оценка функциональных символов
- $\overline{\mathrm{Pred}} : \mathrm{Pred} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$ — оценка предикатных символов

$\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathrm{Const}}(\mathbf{c})$ — предмет, сопоставленный константе **c**

$\overline{\mathbf{f}} = \overline{\mathrm{Func}}(\mathbf{f}) : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D}$ — функция, сопоставленная символу $\mathbf{f}^{(n)}$

$\overline{\mathrm{P}} = \overline{\mathrm{Pred}}(\mathrm{P}) : \mathrm{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ — предикат, сопоставленный символу $\mathrm{P}^{(n)}$

ЛП: семантика термов

Значение $t(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$ терма $t(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ в интерпретации $\mathcal{I}$
на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации —
это **предмет**, задаваемый так:

- термы-переменные:
$$\mathtt{x}_\mathtt{i}[\widetilde{d^n}] = d_i$$
- термы-константы:
$$\mathbf{c}[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{c}}$$
- остальные термы:
$$\mathbf{f}(t_1, \dots, t_k)[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{f}}(t_1[\widetilde{d^n}], \dots, t_k[\widetilde{d^n}])$$

ЛП: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$) определяется так:

- атомарная формула:
  $$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\overline{\mathrm{P}}(t_1[\widetilde{d}^n], \ldots, t_k[\widetilde{d}^n]) = \mathbb{t}$$
- отрицание:
  $$\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n]$$

ЛП: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$) определяется так:

- конъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \,\&\, \psi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \text{ и } \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$$
- дизъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$$
- импликация:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$$

ЛП: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$) определяется так:

- квантор всеобщности:
  $\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}_0\ \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}^n}))[\widetilde{d^n}]$
  $\Leftrightarrow$
  для любого предмета d_0 из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}^n})[d_0, \widetilde{d^n}]$
- квантор существования:
  $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_0\ \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}^n}))[\widetilde{d^n}]$
  $\Leftrightarrow$
  хотя бы для одного предмета d_0 из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}^n})[d_0, \widetilde{d^n}]$

$\varphi[\mathtt{x}_1/d_1, \dots, \mathtt{x}_n/d_n]$ — синоним записи $\varphi(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n)[d_1, \dots, d_n]$

ЛП: выполнимость, общезначимость

Формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^n})$ выполнима в интерпретации $\mathcal{I}$,
если **существует** набор предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$,
такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}^n})[\widetilde{d^n}]$

Формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^n})$ истинна в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$),
если **для любого** набора предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$
верно $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}^n})[\widetilde{d^n}]$

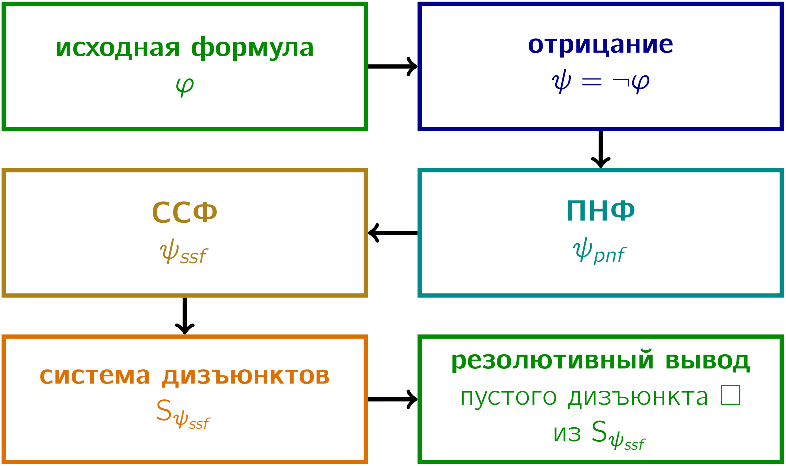
Формула φ выполнима,
если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ общезначима
(тождественно истинна; является тавтологией; $\models \varphi$),
если она истинна в любой интерпретации

Про невыполнимую формулу также часто говорят,
что она тождественно ложна

Проблема общезначимости формул логики предикатов:
для заданной произвольной формулы логики предикатов φ проверить
соотношение $\models \varphi$

Общая схема метода резолюций



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$\Leftrightarrow$ существует вывод $\square$ из $S_{\psi_{ssf}}$

Общая схема метода резолюций

Эквивалентность (логическая связка):

$$\varphi \leftrightarrow \psi \text{ — это сокращение для формулы } (\varphi \rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \rightarrow \varphi)$$

Формулы φ, ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ общезначима

Утверждение. **Для любых равносильных формул $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ ЛП, интерпретации $\mathcal{I}$ и набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно следующее:**

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$$

Утверждение. **$\sim$ — отношение эквивалентности**

Утверждение. **Если формула φ общезначима, то любая равносильная ей формула ψ также общезначима**

Утверждение. **Если формула φ выполнима, то любая равносильная ей формула ψ также выполнима**

Общая схема метода резолюций

$\varphi[\![\psi]\!]$ — обозначение формулы φ, содержащей подформулу ψ

$\varphi[\![\psi/\chi]\!]$ — формула, получающаяся из φ заменой некоторого вхождения подформулы ψ на χ

Теорема (о равносильной замене в ЛП)

Для любых формул φ, ψ, χ логики предикатов верно:

$$\psi \sim \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi[\![\psi]\!] \sim \varphi[\![\psi/\chi]\!]$$

Общая схема метода резолюций

Замкнутая формула логики предикатов находится в предварённой нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 \mathtt{x}_1 \ \ldots Q_n \mathtt{x}_n}_{\text{кванторная приставка}} \ \underbrace{(\mathrm{D}_1 \,\&\ldots\&\, \mathrm{D}_k)}_{\text{матрица}} \ , \text{ где}$$

- $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- матрица — это бескванторная формула в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):
  - $\mathrm{D}_i = \mathrm{L}_1^i \vee \cdots \vee \mathrm{L}_{m_i}^i$ — множитель
  - L_j^i — литера: атом или его отрицание

Наряду с «находится в ПНФ» будем говорить «является ПНФ»

Теорема (о предварённой нормальной форме)
Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Общая схема метода резолюций

Замкнутая формула логики предикатов находится в сколемовской стандартной форме (ССФ), если

- она находится в предварённой нормальной форме и
- её кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathsf{D}_k)$$

Лемма (об удалении $\exists$)

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \exists \mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}\ \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

формула φ выполнима

$$\Leftrightarrow$$

формула $\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (\chi\{\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}/\mathbf{f}(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\})$ выполнима

Небольшая вольность: если слева от $\exists$ не стоит ни одного $\forall$, то, согласно лемме, **f** — 0-местный функциональный символ: так будем называть **константы**, и писать «**f**()» наряду с «**f**»

Общая схема метода резолюций

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}

Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Алгоритм. Пока в кванторной приставке есть хотя бы один квантор $\exists$, самый левый $\exists$ удаляется при помощи подстановки сколемовского терма по лемме об удалении $\exists$

Теорема (о сколемизации). Для любой ПНФ φ_{pnf} формула $Sk(\varphi_{pnf})$ является ССФ, для которой верно следующее:

$$\textbf{формула } \varphi_{pnf} \textbf{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{формула } Sk(\varphi_{pnf}) \textbf{ выполнима}$$

Общая схема метода резолюций

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \widetilde{x}^n\,(L_1 \vee \dots \vee L_k),$$

где L_i — литера (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать
кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall \widetilde{x}^n\,(L_1 \vee \dots \vee L_k) = L_1 \vee \dots \vee L_k$$

Для упрощения технических выкладок дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых, принято отождествлять

То есть дизъюнкт отождествляется с мультимножеством его литер:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k = \{L_1, \dots, L_k\}$$

Общая схема метода резолюций

Пустой дизъюнкт $\square$ — это особый дизъюнкт, представляющий собой пустое множество литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$\mathrm{L}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{L}_k \text{ «}\sim\text{» } \mathrm{L}_1 \vee \cdots \vee \mathrm{L}_k \vee \mathbb{f}, \text{ а значит, } \square \text{ «}\sim\text{» } \mathbb{f}$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) множество дизъюнктов

Система дизъюнктов S выполнима,
если она имеет хотя бы одну модель,
и невыполнима иначе

Теорема (о переходе к дизъюнктам)
Для ССФ с любым набором множителей $\mathrm{D}_1, \dots, \mathrm{D}_k$ верно:

$$\textbf{формула } \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}} \, (\mathrm{D}_1 \,\&\, \dots \,\&\, \mathrm{D}_k) \textbf{ выполнима}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\textbf{система } \{\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}} \, \mathrm{D}_1, \dots, \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}} \, \mathrm{D}_k\} \textbf{ выполнима}$$

Общая схема метода резолюций

Композиция подстановок θ и η — это подстановка $\theta\eta$, такая что для любой переменной $\mathtt{x}$ верно равенство

$$\mathtt{x}(\theta\eta) = (\mathtt{x}\theta)\eta$$

Подстановка θ называется унификатором выражений E_1, E_2, если $E_1\theta = E_2\theta$

$У(E_1, E_2)$ — множество всех унификаторов выражений E_1, E_2

Утверждение

Для любых подстановок θ, η и любых выражений E_1, E_2 верно:

если $\theta \in У(E_1, E_2)$, то $\theta\eta \in У(E_1, E_2)$

Подмножество S множества подстановок Θ называется полным в Θ, если любая подстановка θ из Θ представима в виде $\theta = \eta\mu$, где $\eta \in S$

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором выражений E_1, E_2, если множество $\{\theta\}$ является полным в $У(E_1, E_2)$

$НОУ(E_1, E_2)$ — множество всех наиболее общих унификаторов выражений E_1, E_2

Общая схема метода резолюций

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- D_1, D_2 — дизъюнкты
- L_1, L_2 — положительные литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента дизъюнктов $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$

Литеры L_1, $\neg L_2$ образуют контрарную пару

Общая схема метода резолюций

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- D — дизъюнкт
- L_1, L_2 — литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют склеиваемую пару

Общая схема метода резолюций

Для логического выражения E и подстановки θ, являющейся биекцией $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Var}$ $E\theta$ — вариант выражения E

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это
конечная последовательность дизъюнктов

$$\mathrm{D}_1, \ \ldots, \ \mathrm{D}_i, \ \ldots, \ \mathrm{D}_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- вариантом дизъюнкта из S,
- склейкой дизъюнкта D_j, где $j < i$, или
- резольвентой дизъюнктов D_j, D_m, где $j < i$ и $m < i$

Дизъюнкт резолютивно выводи́м из S, если существует резолютивный вывод из S, оканчивающийся этим дизъюнктом

Общая схема метода резолюций

Резолютивный вывод успешен,
если он оканчивается пустым дизъюнктом ($\square$)

Успешный резолютивный вывод также называется
резолютивным опровержением

Теорема (о корректности резолютивного вывода)
Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводи́м $\square$, то система S невыполнима

Теорема (о полноте резолютивного вывода). Из любой невыполнимой системы дизъюнктов резолютивно выводи́м пустой дизъюнкт

Пример: обоснование общезначимости формулы
$$\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x})\,\&(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$$
методом резолюций

Общая схема метода резолюций

Этап 1: поставить отрицание

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

Этап 2: построить равносильную ПНФ

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

$$\sim \text{(\textit{переименование переменных})}$$

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists u\,R(x,u))$$

$$\sim \text{(\textit{удаление импликаций})}$$

$$\neg\exists x\,(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z) \vee \exists y\,R(x,y))) \vee \exists u\,R(x,u))$$

$$\sim \text{(\textit{продвижение отрицаний})}$$

$$\forall x\,(P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$

$$\sim \text{(\textit{вынесение кванторов})}$$

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\sim \text{(\textit{получение КНФ})}$$

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Общая схема метода резолюций

$$\models \exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 3: построить ССФ, применив алгоритм сколемизации

$$\not\models \forall x\ \underline{\exists z\ }\underline{\exists y\ }\forall u\ (P(x)\,\&(\neg P(\underline{z}) \vee R(x,\underline{y}))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\ \forall u\ (P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 4: перейти к системе дизъюнктов

$$\not\models \forall x\ \forall u\ (P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x),\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)),\ \neg R(x,u)\}$$

Общая схема метода резолюций

$$\models \exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x),\quad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)),\quad \neg R(x,u)\}$$

Этап 5: резолютивно вывести $\Box$

$$P(x_1) \qquad \neg P(\mathbf{f}(x_2)) \vee R(x_2, \mathbf{g}(x_2)) \qquad R(x_3, \mathbf{g}(x_3)) \qquad \neg R(x_4, u_4) \longrightarrow \Box$$

Оказалось, что $\Box$ резолютивно выводи́м
из построенной системы дизъюнктов

Следовательно (по спектру изложенных ранее теорем), исходная формула

$$\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

общезначима