

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Билет 3

Билет 3

Логика 1-го порядка

Выполнимость и общезначимость

Общая схема метода резолюций

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Логика предикатов 1-го порядка (ЛП): алфавит

Базовые символы

Предметные константы

Ими обозначаются конкретные (именованные, фиксированные) предметы

Например: я, 2, π, Солнце, c_1 , ...

Const — множество всех констант

Предметные переменные

Ими обозначаются безымянные (нефиксированные) предметы

Они будут записываться привычно: x , y' , z_4 , ...

Var — множество всех переменных

Далее это множество полагается счётным и заданным однозначно

Логика предикатов 1-го порядка (ЛП): алфавит

Базовые символы

Функциональные символы

Ими обозначаются операции над предметами

Например: +, **сосед**, **lim**, ...

Каждому функциональному символу сопоставляется особое натуральное число — **местность**

$f^{(k)}$ — запись функционального символа **f** с обозначением местности k

Func — множество всех функциональных символов

с сопоставленными им местностями

Предикатные символы

Ими обозначаются отношения между предметами и свойства предметов

Например: <, **является соседом**, **красный**, ...

При задании языка логики предикатов каждому предикатному символу сопоставляется особое натуральное число — **местность**

$P^{(k)}$ — запись предикатного символа **P** с обозначением местности k

Pred — множество всех предикатных символов

с сопоставленными им местностями

Логика предикатов 1-го порядка (ЛП): алфавит

Логические операции

Логические **связки**

$\&$ \vee \neg \rightarrow

Кванторы

Квантор всеобщности («для любого предмета»): \forall

Квантор существования («существует предмет»): \exists

Знаки препинания

() ,

Сигнатурой алфавита логики предикатов называется тройка
 $\langle \text{Const, Func, Pred} \rangle$

Выбором сигнатуры определяется рассматриваемый вариант языка логики предикатов:

- ▶ Символы сигнатуры отвечают понятиям, высказывания о которых предполагается записывать на языке логики предикатов
- ▶ Символы, не входящие в сигнатуру, одинаковы для всех вариантов языка

ЛП: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики предикатов:

$$\begin{aligned} t ::= & x \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ \varphi ::= & P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid \\ & (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid \\ & (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi), \end{aligned}$$

где:

- ▶ φ — формула
- ▶ t, t_1, t_2, \dots, t_n — термы
- ▶ $x \in \text{Var}$
- ▶ $\mathbf{c} \in \text{Const}$
- ▶ $\mathbf{f}^{(n)} \in \text{Func}$
- ▶ $P^{(k)} \in \text{Pred}$

ЛП: синтаксис

$$t ::= x \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

При помощи термов описываются предметы, получающиеся в результате применения заданных функций (операций) к заданным предметам

Term — множество всех термов

(над заданными множествами Var , Const , Func)

\tilde{x}^n — сокращённая запись последовательности « x_1, \dots, x_n »

Если t — терм, то:

Var_t — множество всех переменных, входящих в терм t

$t(\tilde{x}^n)$ — синоним t , если $\text{Var}_t \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$

$$\varphi ::= P^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) \mid$$
$$(\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\forall x \varphi) \mid (\exists x \varphi)$$

При помощи формул описываются отношения между предметами, строящиеся из «базовых» отношений при помощи логических операций. В некоторых случаях (отношение местности 0) формулой может описываться и высказывание, оцениваемое как истина или ложь.

ЛП: синтаксис

Формула **атомарна** (является **атомом**), если имеет вид $P(t_1, t_2, \dots, t_k)$, где $P^{(k)} \in \text{Pred}$ и $t_1, t_2, \dots, t_k \in \text{Term}$

Остальные формулы называются **составными**

Приоритет логических операций (в порядке убывания):

\forall, \exists, \neg ; затем $\&$; затем \vee ; затем \rightarrow

Как работают приоритеты (пример)

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$$\begin{aligned} & \forall x \neg P(x) \& \exists y R(x, y) \rightarrow \exists x (\neg P(x) \vee P(y)) \\ & \forall x (\neg P(x)) \& (\exists y R(x, y)) \rightarrow \exists x ((\neg P(x)) \vee P(y)) \\ & (\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y)) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y))) \\ & ((\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y))) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y))) \end{aligned}$$

ЛП: синтаксис

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$

ЛП: синтаксис

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Переменная y связана квантором \exists

ЛП: синтаксис

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$

Переменная x связана квантором \forall

ЛП: синтаксис

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Область действия квантора \exists

ЛП: синтаксис

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —

свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$

Область действия квантора \forall

ЛП: синтаксис

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Связанные вхождения переменной y

ЛП: синтаксис

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора

в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия

связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —


свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —

свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$

 **Связанное вхождение** переменной x

ЛП: синтаксис

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формулах вида $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y))) \rightarrow R(x)$$

Свободное вхождение переменной x

ЛП: синтаксис

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Если φ — формула, то:

- ▶ $\varphi(\tilde{x}^n)$ — синоним φ , если $\text{Var}_\varphi \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$
- ▶ если $\text{Var}_\varphi = \emptyset$, то φ — замкнутая формула, или предложение

ЛП: семантика

Интерпретация (сигнатуры $\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$) — это система $\langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$, где:

- ▶ D — непустое множество **предметов**
(область интерпретации; предметная область; универсум)
- ▶ $\overline{\text{Const}} : \text{Const} \rightarrow D$ — **оценка констант**
- ▶ $\overline{\text{Func}} : \text{Func} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} (D^n \rightarrow D)$ — **оценка функциональных символов**
- ▶ $\overline{\text{Pred}} : \text{Pred} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} (D^n \rightarrow \{\text{t}, \text{f}\})$ — **оценка предикатных символов**

$\overline{c} = \overline{\text{Const}}(c)$ — **предмет**, сопоставленный константе c

$\overline{f} = \overline{\text{Func}}(f) : D^n \rightarrow D$ — **функция**, сопоставленная символу $f^{(n)}$

$\overline{P} = \overline{\text{Pred}}(P) : D^n \rightarrow \{\text{t}, \text{f}\}$ — **предикат**, сопоставленный символу $P^{(n)}$

ЛП: семантика термов

Значение $t(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ терма $t(\tilde{x}^n)$ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации — это **предмет**, задаваемый так:

- ▶ термы-переменные:

$$x_i[\tilde{d}^n] = d_i$$

- ▶ термы-константы:

$$c[\tilde{d}^n] = \bar{c}$$

- ▶ остальные термы:

$$f(t_1, \dots, t_k)[\tilde{d}^n] = \bar{f}(t_1[\tilde{d}^n], \dots, t_k[\tilde{d}^n])$$

ЛП: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\tilde{x}^n)$ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$) определяется так:

- ▶ атомарная формула:

$$\mathcal{I} \models P(t_1, \dots, t_k)[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

$$\bar{P}(t_1[\tilde{d}^n], \dots, t_k[\tilde{d}^n]) = \text{т}$$

- ▶ отрицание:

$$\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\tilde{d}^n]$$

ЛП: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\tilde{x}^n)$ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$) определяется так:

▶ конъюнкция:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \& \psi)[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \text{ и } \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

▶ дизъюнкция:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

▶ импликация:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\tilde{d}^n] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

ЛП: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\tilde{x}^n)$ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$) определяется так:

- ▶ квантор всеобщности:

$$\mathcal{I} \models (\forall x_0 \varphi(x_0, \tilde{x}^n))[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

для любого предмета d_0 из области интерпретации верно
 $\mathcal{I} \models \varphi(x_0, \tilde{x}^n)[d_0, \tilde{d}^n]$

- ▶ квантор существования:

$$\mathcal{I} \models (\exists x_0 \varphi(x_0, \tilde{x}^n))[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

хотя бы для одного предмета d_0 из области интерпретации верно

$$\mathcal{I} \models \varphi(x_0, \tilde{x}^n)[d_0, \tilde{d}^n]$$

$\varphi[x_1/d_1, \dots, x_n/d_n]$ — синоним записи $\varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$

ЛП: выполнимость, общезначимость

Формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ **выполнима** в интерпретации \mathcal{I} ,
если **существует** набор предметов \tilde{d}^n из области интерпретации \mathcal{I} ,
такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

Формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ **истинна** в интерпретации \mathcal{I} ($\mathcal{I} \models \varphi$),
если **для любого** набора предметов \tilde{d}^n из области интерпретации \mathcal{I}
верно $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

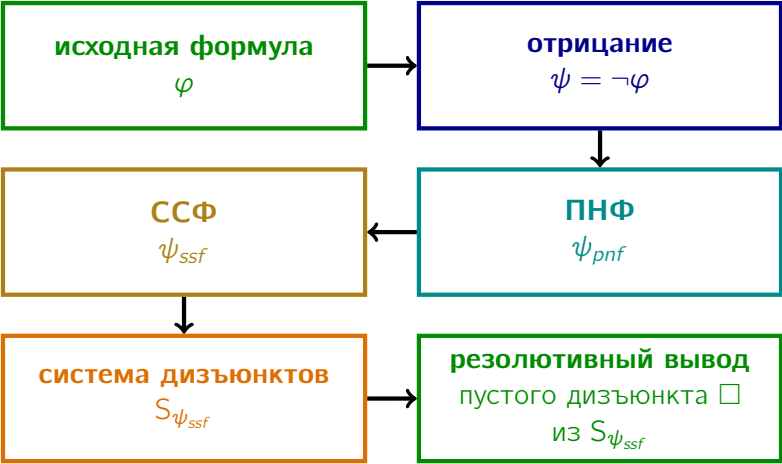
Формула φ **выполнима**,
если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ **общезначима**
(**тождественно истинна**; является **тавтологией**; $\models \varphi$),
если она истинна в любой интерпретации

Про невыполнимую формулу также часто говорят,
что она **тождественно ложна**

Проблема общезначимости формул логики предикатов:
для заданной произвольной формулы логики предикатов φ проверить
соотношение $\models \varphi$

Общая схема метода резолюций



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}} \Leftrightarrow \text{существует вывод } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}$$

Общая схема метода резолюций

Эквивалентность (логическая связка):

$\varphi \leftrightarrow \psi$ — это сокращение для формулы $(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$

Формулы φ, ψ **равносильны** ($\varphi \sim \psi$), если формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ общезначима

Утверждение. Для любых равносильных формул $\varphi(\tilde{x}^n), \psi(\tilde{x}^n)$ ЛП, интерпретации \mathcal{I} и набора предметов \tilde{d}^n верно следующее:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

Утверждение. \sim — отношение эквивалентности

Утверждение. Если формула φ общезначима, то любая равносильная ей формула ψ также общезначима

Утверждение. Если формула φ выполнима, то любая равносильная ей формула ψ также выполнима

Общая схема метода резолюций

$\varphi[\psi]$ — обозначение формулы φ , содержащей подформулу ψ

$\varphi[\psi/\chi]$ — формула, получающаяся из φ заменой некоторого вхождения подформулы ψ на χ

Теорема (о равносильной замене в ЛП)

Для любых формул φ , ψ , χ логики предикатов верно:

$$\psi \sim \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi[\psi] \sim \varphi[\psi/\chi]$$

Общая схема метода резолюций

Замкнутая формула логики предикатов находится в **предварённой нормальной форме (ПНФ)**, если она имеет вид

$$\underbrace{Q_1 x_1 \dots Q_n x_n}_{\text{кванторная приставка}} \underbrace{(D_1 \& \dots \& D_k)}_{\text{матрица}}, \text{ где}$$

- ▶ $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
- ▶ матрица — это бескванторная формула в **конъюнктивной нормальной форме (КНФ)**:
 - ▶ $D_i = L_1^i \vee \dots \vee L_{m_i}^i$ — множитель
 - ▶ L_j^i — **литера**: атом или его отрицание

Наряду с «находится в ПНФ» будем говорить «является ПНФ»

Теорема (о предварённой нормальной форме)

Для любой замкнутой формулы логики предикатов существует равносильная ей предварённая нормальная форма

Общая схема метода резолюций

Замкнутая формула логики предикатов находится в **сколемовской стандартной форме (ССФ)**, если

- ▶ она находится в предварённой нормальной форме и
- ▶ её кванторная приставка не содержит кванторов \exists :

$$\forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$$

Лемма (об удалении \exists)

Пусть $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ . Тогда формула φ выполнима

\Leftrightarrow

формула $\forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$ выполнима

Небольшая вольность: если слева от \exists не стоит ни одного \forall , то, согласно лемме, f — **0-местный функциональный символ**: так будем называть **константы**, и писать « $f()$ » наряду с « f »

Общая схема метода резолюций

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}

Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \Leftrightarrow Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Алгоритм. Пока в кванторной приставке есть хотя бы один квантор \exists , самый левый \exists удаляется при помощи подстановки сколемовского терма по лемме об удалении \exists

Теорема (о сколемизации). Для любой ПНФ φ_{pnf} формула $Sk(\varphi_{pnf})$ является ССФ, для которой верно следующее:
формула φ_{pnf} выполнима \Leftrightarrow формула $Sk(\varphi_{pnf})$ выполнима

Общая схема метода резолюций

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \tilde{x}^n (L_1 \vee \dots \vee L_k),$$

где L_i — **литера** (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать
кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall \tilde{x}^n (L_1 \vee \dots \vee L_k) = L_1 \vee \dots \vee L_k$$

Для упрощения технических выкладок дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых, принято отождествлять

То есть дизъюнкт отождествляется с **мультимножеством** его литер:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k = \{L_1, \dots, L_k\}$$

Общая схема метода резолюций

Пустой дизъюнкт \square — это особый дизъюнкт, представляющий собой пустое множество литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k \llsim L_1 \vee \dots \vee L_k \vee f, \text{ а значит, } \square \llsim f$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) множество дизъюнктов

Система дизъюнктов S **выполнима**,
если она имеет хотя бы одну модель,
и **невыполнима** иначе

Теорема (о переходе к дизъюнктам)

Для ССФ с любым набором множителей D_1, \dots, D_k верно:

формула $\forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$ выполнима

\Leftrightarrow

система $\{\forall \tilde{x}^n D_1, \dots, \forall \tilde{x}^n D_k\}$ выполнима

Общая схема метода резолюций

Композиция подстановок θ и η — это подстановка $\theta\eta$,

такая что для любой переменной x верно равенство

$$x(\theta\eta) = (x\theta)\eta$$

Подстановка θ называется **унификатором** выражений E_1, E_2 , если $E_1\theta = E_2\theta$

$\mathcal{U}(E_1, E_2)$ — множество всех унификаторов выражений E_1, E_2

Утверждение

Для любых подстановок θ, η и любых выражений E_1, E_2 верно:

если $\theta \in \mathcal{U}(E_1, E_2)$, то $\theta\eta \in \mathcal{U}(E_1, E_2)$

Подмножество S множества подстановок Θ называется **полным** в Θ , если любая подстановка θ из Θ представима в виде $\theta = \eta\mu$, где $\eta \in S$

Подстановка θ называется **наиболее общим унификатором** выражений E_1, E_2 , если множество $\{\theta\}$ является полным в $\mathcal{U}(E_1, E_2)$

$\text{НОУ}(E_1, E_2)$ — множество всех наиболее общих унификаторов выражений E_1, E_2

Общая схема метода резолюций

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- ▶ D_1, D_2 — дизъюнкты
- ▶ L_1, L_2 — положительные литеры
- ▶ $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента дизъюнктов $D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2$

Литеры $L_1, \neg L_2$ образуют **контрарную пару**

Общая схема метода резолюций

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- ▶ D — дизъюнкт
- ▶ L_1, L_2 — литеры
- ▶ $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — **склейка** дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют **склеиваемую пару**

Общая схема метода резолюций

Для логического выражения E и подстановки θ , являющейся биекцией $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Var}$ $E\theta$ — **вариант** выражения E

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это конечная последовательность дизъюнктов

$$D_1, \dots, D_i, \dots, D_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_j является

- ▶ **вариантом** дизъюнкта из S ,
- ▶ **склежкой** дизъюнкта D_j , где $j < i$, или
- ▶ **резольвентой** дизъюнктов D_j, D_m , где $j < i$ и $m < i$

Дизъюнкт **резолютивно выводим** из S , если существует резолютивный вывод из S , оканчивающийся этим дизъюнктом

Общая схема метода резолюций

Резолютивный вывод **успешен**,
если он оканчивается пустым дизъюнктом (\square)

Успешный резолютивный вывод также называется
резолютивным опровержением

Теорема (о корректности резолютивного вывода)

Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим \square ,
то система S невыполнима

Теорема (о полноте резолютивного вывода). Из любой
невыполнимой системы дизъюнктов
резолютивно выводим пустой дизъюнкт

Пример: обоснование общезначимости формулы

$$\exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)$$

методом резолюций

Общая схема метода резолюций

Этап 1: поставить отрицание

$$\models \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)$$
$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)$$

Этап 2: построить равносильную ПНФ

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y)$$

\sim (переименование переменных)

$$\neg \exists x (P(x) \& (\forall z P(z) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists u R(x, u)$$

\sim (удаление импликаций)

$$\neg \exists x (\neg (P(x) \& (\neg \forall z P(z) \vee \exists y R(x, y))) \vee \exists u R(x, u))$$

\sim (продвижение отрицаний)

$$\forall x (P(x) \& (\exists z \neg P(z) \vee \exists y R(x, y)) \& \forall u \neg R(x, u))$$

\sim (вынесение кванторов)

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

\sim (получение КНФ)

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

Общая схема метода резолюций

$$\models \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

\Leftrightarrow

$$\not\models \forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

Этап 3: построить ССФ, применив алгоритм сколемизации

$$\not\models \forall x \exists \underline{z} \exists \underline{y} \forall u (P(x) \& (\neg P(\underline{z}) \vee R(x, \underline{y})) \& \neg R(x, u))$$

\Leftrightarrow

$$\not\models \forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \& \neg R(x, u))$$

Этап 4: перейти к системе дизъюнктов

$$\not\models \forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \& \neg R(x, u))$$

\Leftrightarrow

$$\not\models \{P(x), \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \neg R(x, u)\}$$

Общая схема метода резолюций

$$\models \exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

\Leftrightarrow

$$\not\models \{P(x), \quad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \quad \neg R(x, u)\}$$

Этап 5: резолютивно вывести \square

$$P(x_1) \quad \neg P(\mathbf{f}(x_2)) \vee R(x_2, \mathbf{g}(x_2)) \quad R(x_3, \mathbf{g}(x_3)) \quad \neg R(x_4, u_4) \longrightarrow \square$$

Оказалось, что \square резолютивно выводим
из построенной системы дизъюнктов

Следовательно (по спектру изложенных ранее теорем), исходная
формула

$$\exists x (P(x) \& (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

общезначима