

# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 6

Логика предикатов (ЛП):  
выполнимые и общезначимые формулы  
модели формул  
логическое следствие  
проблема общезначимости формул (постановка)

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

# Вступление

Продолжаем обсуждение **логики предикатов** (ЛП)

*Вспомним на примере, что есть что*

**Сигнатура:**

$$\langle \{\mathbf{c}\}, \{\mathbf{f}^{(1)}\}, \{P^{(1)}\} \rangle$$

**Формула:**

$$\varphi = P(\mathbf{c}) \rightarrow \forall x P(\mathbf{f}(x))$$

**Интерпретация  $\mathcal{I}$ :**

предметная область:  $\{d_1, d_2\}$

$$\bar{\mathbf{c}} = d_1 \quad \bar{\mathbf{f}}(d_1) = \bar{\mathbf{f}}(d_2) = d_1 \quad \bar{P}(d_1) = \mathfrak{t}, \quad \bar{P}(d_2) = \mathfrak{f}$$

**Отношение выполнимости:**

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

## ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Формула  $\varphi(\tilde{x}^n)$  **выполнима в интерпретации**  $\mathcal{I}$  ( $\mathcal{I} \models \varphi^1$ ),  
если **существует** набор предметов  $\tilde{d}^n$  из области интерпретации  $\mathcal{I}$ ,  
такой что  $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

Формула  $\varphi(\tilde{x}^n)$  **истинна в интерпретации**  $\mathcal{I}$  ( $\mathcal{I} \models \varphi$ ),  
если **для любого** набора предметов  $\tilde{d}^n$  из области интерпретации  $\mathcal{I}$   
верно  $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

Формула  $\varphi$  **выполнима** ( $\models \varphi^1$ ),  
если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула  $\varphi$  **общезначима**  
(**тождественно истинна**; является **тавтологией**;  $\models \varphi$ ),  
если она истинна в любой интерпретации

Про невыполнимую формулу также часто говорят,  
что она **тождественно ложна**

---

<sup>1</sup> Как и раньше, это необщепотребимое обозначение

# ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

## Пример

$$\varphi: \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\psi: \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

$$\chi: \forall x P(x) \& \forall x \neg P(x)$$

Интерпретация  $\mathcal{I}_1$ :  $D = \{d\}$ ,  $\bar{P}(d) = \text{t}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi$$

$$\mathcal{I}_1 \models \psi$$

$$\mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация  $\mathcal{I}_2$ :  $D = \{d_1, d_2\}$ ,  $\bar{P}(d_1) = \text{t}$ ,  $\bar{P}(d_2) = \text{f}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi$$

$$\mathcal{I}_2 \not\models \psi$$

$$\mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Только что было показано, что

1. формулы  $\varphi$ ,  $\psi$  выполнимы
2. формулы  $\psi$ ,  $\chi$  необщезначимы

А как доказать общезначимость  $\varphi$  и невыполнимость  $\chi$ ?

# ЛП: выполнимые и общезначимые формулы

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, в которых записана некоторая «нетривиальная» («полезная») информация

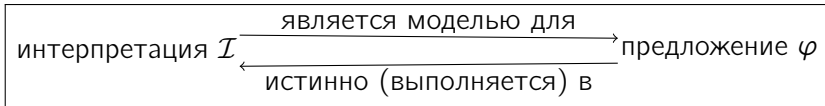
Общезначимые формулы — это (*казалось бы*) банальности, тавтологии, формы, не содержащие в себе никакой «полезной» информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными, и в курсе будут обсуждаться в основном такие формулы

Почему?

## ЛП: модели

Интерпретация  $\mathcal{I}$  называется **моделью для предложения**  $\varphi$ , если  $\mathcal{I} \models \varphi$



Интерпретация  $\mathcal{I}$  называется **моделью для множества предложений**  $\Gamma$  ( $\mathcal{I} \models \Gamma$ ), если она является моделью для каждого предложения из  $\Gamma$ , и в этом случае также говорят, что  $\Gamma$  **выполняется** в  $\mathcal{I}$

Наряду с «модель для формулы/множества» будем также говорить «**модель формулы/множества**» (без «для»)

Относительно каждой интерпретации  $\mathcal{I}$  все предложения делятся на

- ▶ выполнимые в  $\mathcal{I}$  («верные») и
- ▶ невыполнимые в  $\mathcal{I}$  («неверные»)

Относительно каждого предложения  $\varphi$  все интерпретации делятся на

- ▶ модели для  $\varphi$  (адекватно подходящие под устройство  $\varphi$ ) и
- ▶ не являющиеся моделями для  $\varphi$  (неподходящие)

# ЛП: модели

## Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

$C(x)$ : « $x$  — круг»

$B(x)$ : « $x$  — чёрный предмет»

$S(x)$ : « $x$  — квадрат»

$W(x)$ : « $x$  — белый предмет»

$U(x, y)$ : «предмет  $x$  лежит под предметом  $y$ »

Рассмотрим такую формулу  $\varphi$ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

«любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом»

и такие интерпретации:



Тогда  $\mathcal{I}_1$  является моделью для  $\varphi$ , а  $\mathcal{I}_2$  не является:

- ▶  $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ : оба белых квадрата лежат под чёрными кругами
- ▶  $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$ : левый белый квадрат **не** лежит под чёрным кругом

## ЛП: логическое следствие

Предложение  $\varphi$  называется **логическим следствием** множества предложений  $\Gamma$  ( $\Gamma \models \varphi$ ), если любая модель  $\Gamma$  является моделью  $\varphi$

*Другими словами* — если для любой интерпретации  $\mathcal{I}$  верно

$$\mathcal{I} \models \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi$$

*Содержательно* — если независимо от смысла символов сигнатуры из справедливости всех утверждений, записанных в  $\Gamma$ , **обязательно** следует справедливость утверждения  $\varphi$

Отношение  $\models$ , используемое в таком смысле, будем называть **отношением логического следования**

Наряду с « $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \models \varphi$ » будем также писать « $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$ »



# ЛП: логическое следствие

## Небольшое пояснение:

▶  $\forall x P(x) \models P(c)$ :

если все предметы обладают свойством  $P$ , то **обязательно** предмет, обозначенный символом  $c$ , обладает свойством  $P$

▶  $P(c) \not\models \forall x P(x)$ :

если предмет, обозначенный символом  $c$ , обладает свойством  $P$ , то из этого **в общем случае не следует**, что все предметы обладают свойством  $P$

Одна из главных задач (и характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это

**извлечение логических следствий** из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей «разумной деятельности»: **экспертные системы**, (автоматическое и ручное) **доказательство теорем**, **формальный анализ программ**, ..., ...

## ЛП: логическое следствие (пример)

Покажем, что представляют собой логические следствия, на простом показательном примере

Известно, что:

- ▶ Даша любит Сашу,
- ▶ а Саша любит пиво,
- ▶ а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов

Начнём с сигнатуры алфавита: в неё войдут

- ▶ константы **Даша**, **Саша**, **Паша**, **пиво** и
- ▶ предикатный символ  $L^{(2)}$ :  $L(x, y) = \text{«икс любит игрека»}$

## ЛП: логическое следствие (пример)

Условия задачи переписываются так:

- ▶ Даша любит Сашу

$$\varphi_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$$

- ▶ Саша любит пиво

$$\varphi_2 = L(\text{Саша}, \text{пиво})$$

- ▶ Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:

$$\varphi_3 = L(\text{Паша}, \text{пиво})$$

$$\varphi_4 = \forall x (\exists y (L(\text{Паша}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\text{Паша}, x))$$

- ▶ Любит ли кто-нибудь дашу?

Правда ли, что из знаний  $\varphi_1, \dots, \varphi_4$  необходимо следует знание

$$\varphi_0 = \exists x L(x, \text{Даша}) ?$$

В конечном итоге задача переписывается так:

$$\text{проверить соотношение } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \varphi_0$$

## Теорема о логическом следствии

Для любого предложения  $\varphi$  и любого конечного множества предложений  $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  справедлива равносильность

$$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi_1 \& \psi_2 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) Предположим, что  $\Gamma \models \varphi$

Рассмотрим произвольную интерпретацию  $\mathcal{I}$

*Если  $\mathcal{I} \not\models \Gamma$* , то  $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$ , а значит,  $\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

*Пусть теперь  $\mathcal{I} \models \Gamma$*

Так как  $\Gamma \models \varphi$ , верно и  $\mathcal{I} \models \varphi$  —

а значит, снова верно  $\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

*Итог:* для любой интерпретации  $\mathcal{I}$  верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

По определению общезначимости, это означает  $\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

## Теорема о логическом следствии

Для любого предложения  $\varphi$  и любого конечного множества предложений  $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  справедлива равносильность

$$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi_1 \& \psi_2 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

**Доказательство.** ( $\Leftarrow$ ) Предположим, что  $\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

Рассмотрим произвольную модель  $\mathcal{I}$  для множества  $\Gamma$ :

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \quad \dots, \quad \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда  $\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$

Так как формула  $\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$  общезначима, верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

Согласно семантике  $\rightarrow$ , верно  $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, произвольная модель  $\mathcal{I}$  множества  $\Gamma$  является и моделью формулы  $\varphi$ , то есть  $\Gamma \models \varphi$  ▼

## ЛП: проблема общезначимости формул

Чтобы уметь извлекать логические следствия и в целом анализировать достоверность утверждений, необходимо понимать **законы**, связывающие достоверность различных утверждений

Общезначимые формулы представляют собой один из способов записи таких законов — например, закон вида «**если верны утверждения  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , то верно и  $\varphi$** » записывается в виде общезначимой формулы

$$\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

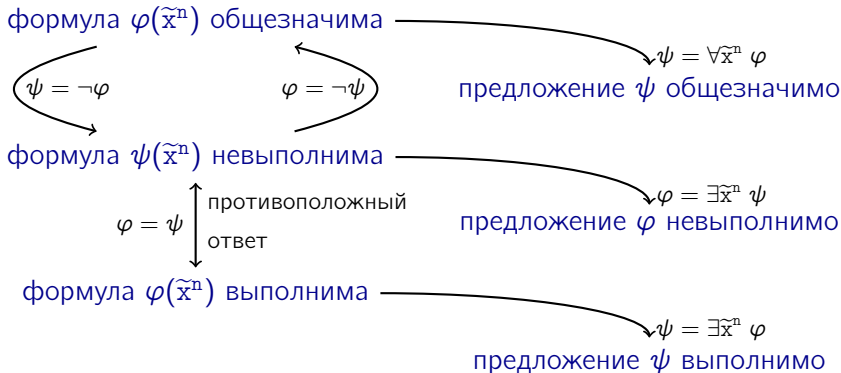
В связи с этим оказывается важна **проблема общезначимости формул**:

**для заданной формулы  $\varphi$   
проверить её общезначимость:**

$$\models \varphi ?$$

# ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:



$\forall \tilde{x}^n$  — сокращение для  $\forall x_1 \dots \forall x_n$

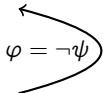
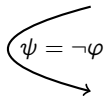
$\exists \tilde{x}^n$  — сокращение для  $\exists x_1 \dots \exists x_n$

# ЛП: проблема общезначимости формул

Несколько слов о взаимосвязи свойств общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул логики предикатов:

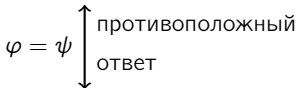
## Утверждение

формула  $\varphi(\tilde{x}^n)$  общезначима



$\psi = \forall \tilde{x}^n \varphi$   
предложение  $\psi$  общезначимо

формула  $\psi(\tilde{x}^n)$  невыполнима



$\varphi = \exists \tilde{x}^n \psi$   
предложение  $\varphi$  невыполнимо

формула  $\varphi(\tilde{x}^n)$  выполнима

$\psi = \exists \tilde{x}^n \varphi$   
предложение  $\psi$  выполнимо

Доказательство. Напрямую следует из определений выполнимости, невыполнимости и общезначимости ▼