Курс «Основы кибернетики» для бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений» кафедры математической кибернетики.

1. Общая информация (учебная нагрузка, формы контроля и др.)

Курс является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 – «Прикладная математика и информатика». При этом объём и, в некоторой степени, программа курса варьируются в зависимости от профиля.

Для бакалавров профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений» (II поток) курс «Основы кибернетики» читается в 6 и 7 семестрах в объёме 2 часов лекций и 1 часа семинарских занятий в неделю. При этом в соответствии с рабочими планами профиля в 6 семестре по данному курсу сдаётся (теоретический) зачёт, а в 7 семестре курс завершается экзаменом, на который выносятся как теоретические вопросы, изложенные на лекциях, так и задачи, рассмотренные на семинарских занятиях.

Для бакалавров кафедры математической кибернетики читается отдельный вариант курса «Основы кибернетики». В разделах 2-7 данного описания приводится подробная информация о содержании указанного варианта курса, программах и планах его изучения в 2013-2014 уч. году, методических материалах, а в разделе 8 – об особенностях организации учебного процесса, формах и сроках проведения контрольных мероприятий.

В соответствии с этими планами в течение 6 семестра проводятся 2 основных (по 2 часа) и, возможно, несколько промежуточных (до 1 часа) тестов (контрольных). По их результатам с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах, а также самостоятельной работы (см. раздел 8) выставляется предварительная оценка, которая играет существенную роль при формировании окончательной оценки на зачёте.

Чтение курса обеспечивается кафедрой математической кибернетики. Лектор 2013-2014 уч. года – профессор Ложкин С.А. (lozhkin@cs.msu.su), преподаватель семинарских занятий – к.ф.-м.н. Нагорный А.С.

2. Аннотация

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С.В. Яблонский, читается на факультете ВМК с первых лет его существования. Он является продолжением курса «Дискретная математика» и посвящён изложению основных моделей, методов и результатов математической кибернетики, связанных с теорией дискретных управляющих систем (УС), с задачей схемной или структурной реализации дискретных функций и алгоритмов.

В нём рассматриваются различные классы УС (классы схем), представляющие собой дискретные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Для базовых классов УС (схем из функциональных элементов, формул, контактных схем, автоматных схем), а также некоторых других типов УС, ставятся и изучаются основные задачи теории УС: задача минимизации дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), задача эквивалентных

преобразований и структурного моделирования УС, задача синтеза УС, задача повышения надёжности и контроля УС из ненадёжных элементов и др. Рассматриваются также некоторые вопросы сложности алгоритмов. В программу курса входят классические результаты К. Шеннона, С.В. Яблонского, Ю.И. Журавлева и О.Б. Лупанова, а также некоторые результаты последних лет.

3. Программа

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи (6 семестр)

Единичный куб и функции алгебры логики (ФАЛ), представление ФАЛ с помощью ДНФ. Сокращённая ДНФ и тупиковые ДНФ, их «геометрический» смысл. Способы построения однозначно получаемых ДНФ (сокращённой, пересечения тупиковых, Квайна, суммы тупиковых). Особенности ДНФ для ФАЛ из некоторых классов. Функция покрытия и алгоритм построения всех тупиковых ДНФ, оценка длины градиентного покрытия. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ, оценки максимальных и типичных значений некоторых параметров ДНФ.

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа (6 семестр)

Различные классы УС (классы схем) как структурные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Основные классы УС – формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ), контактные схемы (КС), – их структура, меры сложности, функционирование, эквивалентность, полнота. Оценка числа схем различных типов.

Понятие подсхемы и принцип эквивалентной замены. Операция суперпозиции схем и её корректность, лемма Шеннона.

III. Синтез и сложность управляющих систем (6 семестр)

Задача синтеза УС, сложность ФАЛ и функция Шеннона. Простейшие методы синтеза схем, реализация некоторых ФАЛ и оценка их сложности. Метод каскадов для КС и СФЭ, метод Шеннона. Мощностные методы получения нижних оценок для функций Шеннона. Асимптотически наилучшие методы синтеза формул, СФЭ и КС.

IV. Синтез схем для ФАЛ из специальных классов и сложность индивидуальных ФАЛ (7 семестр)

Задача синтеза схем для ФАЛ из специальных классов. Инвариантные классы С.В. Яблонского, их структурные и метрические свойства. Асимптотически наилучшие методы синтеза схем для ФАЛ из инвариантных классов. Общее описание принципа локального кодирования О.Б. Лупанова и примеры его применения.

Сферические ФАЛ, сложность реализации линейных и некоторых других ФАЛ в классе КС. Теорема Храпченко, сложность реализации линейных ФАЛ в классе π-схем.

V. Эквивалентные преобразования управляющих систем (7 семестр)

Тождества и связанные с ними эквивалентные преобразования УС. Построение полных систем тождеств для формул, СФЭ и КС. Отсутствие конечной полной системы тождеств для КС. Представление об эквивалентных преобразованиях автоматных схем.

VI. Надёжность и контроль управляющих систем (7 семестр)

Самокорректирующиеся КС и простейшие методы их синтеза. Асимптотически наилучшие методы синтеза КС, корректирующих один обрыв или одно замыкание.

Самокорректирующиеся СФЭ в некоторых базисах из ненадёжных и надёжных элементов, простейшие методы их синтеза. Асимптотически наилучшие методы синтеза СФЭ, корректирующих ограниченное число неисправностей.

Вероятностные модели надёжности СФЭ из ненадёжных элементов, теорема Неймана. Методы повышения надёжности СФЭ, асимптотически наилучшие методы синтеза сколь угодно надёжных СФЭ в некоторых базисах.

Задача контроля УС, тесты для таблиц. Алгоритм построения всех тупиковых тестов, оценки максимального и типичного значений длины диагностического теста. Тесты для контактных схем (на примере линейных КС, построенных методом каскадов).

4. Предварительный список вопросов к зачёту по курсу «Основы кибернетики» (весенний семестр 2013-2014 уч. года; 318 группа), ориентировочный график их изучения на лекциях.

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи (07.II–03.III)

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ. См. [1:гл.1,§§2,5].
2. Сокращённая ДНФ и способы её построения [1:гл.1,§3].
3. Тупиковая ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в тупиковые ДНФ и его локальность. См. [1:гл.1,§4].
4. Особенности ДНФ линейных и монотонных ФАЛ. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ. См. [1:гл.1,§§5,6].
5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о «протыкающих» наборах. Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ. См. [1:гл.1,§6].
6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функции Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ [1:гл.1,§7].
7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров [1:гл.1,§§1,3,7]. Теорема Ю.И. Журавлёва о ДНФ сумма минимальных [1:гл.1,§5].

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. (07.III–17.III)

8. Формулы и способы их задания, эквивалентность формул и функционалы их сложности [1:гл.1,§1, гл.3,§1]. Оптимизация подобных формул по глубине [1:гл.2,§2].
9. Схемы из функциональных элементов (СФЭ) и операции их приведения. Оценка числа формул и СФЭ в базисе $Б_0$={&,∨,¬}. См. [1:гл.2,§§2,3].
10. Контактные схемы (КС) и π-схемы, моделирование формул и π-схем. Оценки числа КС и числа π-схем, особенности функционирования многополюсных КС. См. [1:гл.2,§§5,6].
11. Операция суперпозиции схем и её корректность для некоторых типов схем. Каскадные и разделительные КС, лемма Шеннона. См. [1:гл.2,§§6,7].

III. Синтез и сложность управляющих систем (21.III–07.IV)

12. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций. См. [1:гл.4,§1].
13. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем. См. [1:гл.4,§2], [7:§7].
14. Метод каскадов для КС и СФЭ, примеры его применения. Метод Шеннона. См. [1:гл.4,§3].
15. Нижние мощностные оценки функций Шеннона [1:гл.4,§4].
16. Дизъюнктивно-универсальные множества ФАЛ. Асимптотически наилучший метод О.Б. Лупанова для синтеза СФЭ в базисе $Б_0$. См. [1:гл.4,§5].

17. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование ФАЛ переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза КС. См. [1:гл.4,§§6,7].
18. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $Б_0$, поведение функции Шеннона для глубины ФАЛ [1:гл.4,§6].
19. Задача синтеза схем для ФАЛ из специальных классов. Асимптотически оптимальные методы синтеза СФЭ и КС для ФАЛ из некоторых классов. См. [1:гл.4,§§4,5], [9:гл.5].

5. Типовые задачи к экзамену

I. Задачи на ДНФ

1. По заданной ФАЛ построить её сокращённую ДНФ, ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых, все тупиковые ДНФ.

II-III. Задачи на структурное моделирование и синтез схем

1. По заданной формуле построить подобную ей формулу минимальной глубины.
2. По заданной формуле с поднятыми отрицаниями построить моделирующую её π-схему и обратно.
3. По данной каскадной КС построить инверсную каскадную КС.
4. По заданной ФАЛ с помощью простейших методов, метода каскадов или метода Шеннона построить реализующую её СФЭ или КС.
5. Оценить сверху и снизу сложность конкретной ФАЛ или сложность самой сложной ФАЛ из заданного множества в заданном классе схем.

6. Планы семинарских занятий и даты их проведения

Семинар 1 (07.II)

Комбинаторика n-мерного булевого куба. Структура граней. Связь с ДНФ и КНФ. Импликанты и простые импликанты ФАЛ.
Теоретический материал [1: с. 19-28], [5: с. 290-292].
В классе. Из [5]: гл. IX – 1.1, 1.2 (1-6).
На дом. Из [5]: гл. IX – 1.2 (7-9).

Семинар 2 (12.II)

Представление ФАЛ с помощью ДНФ. Сокращённая ДНФ и методы её построения
Теоретический материал [1: с. 27-35], [5: с. 47, 296-298].
В классе. Из [5]: гл. I – 2.3 (3); гл. IX – 2.1 (1,2), 2.5 (1,5), 2.6 (1,5), 2.3 (1,2), 2.2 (1,2), 2.9 (1,2).
На дом. Из [5]: гл. I – 2.3 (4); гл. IX – 2.1 (3), 2.5 (2,6), 2.6 (2,6), 2.2 (3,4), 2.3 (3,4), 2.9 (6).

Семинар 3 (28.II)

Ядро и ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых. Построение всех тупиковых ДНФ.
Теоретический материал [1: с. 38-43, 51-55], [5: с. 301-302].
В классе. Из [5, гл. IX]: 3.1 (1, 5), 3.3 (1, 2 – построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых), 3.4 (3), 3.6 (1, 4, 7).
На дом. Из [5, гл. IX]: 3.1 (4, 6), 3.3 (3, 4 – построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых), 3.4 (4), 3.6 (3, 6, 8).

Семинар 4 (21.III)

Оптимизация подобных формул по глубине, моделирование формул и π-схем. Сложность ФАЛ и методы синтеза схем на основе ДНФ.
Теоретический материал [1: с. 86-90, 115-117, 186-210].
В классе. Построить формулу минимальной глубины подобную формуле $x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee x_1\,x_3 \vee \bar{x}_2\,\bar{x}_4\,\bar{x}_5 \vee x_4\,x_5\,x_6$; по заданной формуле с поднятыми отрицаниями построить моделирующую π-схему и обратно.

Из [5: гл. X]: 1.1 (2, 3, 4, ФАЛ μ_1 – как в классе СФЭ, так и в классе КС, а также ФАЛ $(x_1 \vee x_2)x_3 \vee (\bar{x}_1 \vee x_2)x_4$ – в классе КС); 2.4 (1); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем.

На дом. Из [5: гл. X]: 1.1 (5-7), 2.4 (2); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем; построить формулу минимальной глубины подобную формуле $x_1 \vee \bar{x}_2\,\bar{x}_3\,\bar{x}_4\,x_5 \vee x_2\,x_3\,x_4 \vee x_4\,x_5 \vee \bar{x}_5\,x_6$.

Семинар 5 (28.III)

Каскадные КС и инверсные КС; метод каскадов для КС и СФЭ. Метод Шеннона.

Теоретический материал [1: с. 186-210].

В классе. Из [5: гл. X]: 2.13 (1, 7), 2.14 (1), 2.14 (5 – как КС и СФЭ) и т.п. Для заданной каскадной КС построить инверсную к ней КС. Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

На дом. Из [5: гл. X]: 2.13 (2, 6), 2.14 (2), 2.14 (6 – как КС, так и СФЭ). Для заданной каскадной КС построить инверсную к ней КС. Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

Семинар 6 (07.IV)

Асимптотически наилучшие методы синтеза, синтез схем для ФАЛ из специальных классов.

Теоретический материал [1, с. 215-216, 222-224].

В классе. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ равных 1 при x_1=1 (КС), класса всех самодвойственных ФАЛ (СФЭ), класса всех ФАЛ симметричных по первым трем БП (КС), класса операторов из трёх ортогональных ФАЛ (СФЭ).

На дом. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ, равных 0 при x_1=x_2=0 (КС), класса, состоящего из всех тех ФАЛ, у которых любая подфункция от первых трёх БП линейна, класса операторов из трёх строго ортогональных ФАЛ (СФЭ).

7. Литература

Основная:

1. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. – М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(318, 418 группы))
2. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. – М.: Высшая школа, 2007.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. Алексеев В.Б., Вороненко А.А., Ложкин С.А., Романов Д.С., Сапоженко А.А., Селезнёва С.Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики». – М.: МГУ, 2011.
5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Алексеев В.Б. Введение в теорию сложности алгоритмов. – М.: Изд-во МГУ, 2002.

Дополнительная:

7. Алексеев В.Б., Ложкин С.А. Элементы теории графов, схем и автоматов. – М.: МГУ, 2000.
8. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1974.
9. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: МГУ, 1984.
10. Нигматулин Р.Г. Сложность булевых функций. – М.: Наука, 1991.

8. Особенности организации и контроля аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Данный вариант курса «Основы кибернетики» является достаточно сложным и объёмным математическим курсом, усвоение которого требует от студентов полноценной и регулярной как аудиторной, так и самостоятельной работы, что невозможно без чёткой организации занятий, строгой дисциплины и систематического контроля. При этом предполагается, что в рамках самостоятельной работы[1] студенты не только прорабатывают пройденный материал, но и *знакомятся с материалом предстоящей лекции или семинара*.

Для контроля за освоением программы курса, как уже говорилось, в течение семестра проводятся 2 основных (по 2 часа) и, возможно, несколько промежуточных (до 1 часа) тестов (контрольных) на знание и понимание определений, формулировок утверждений и т.п., а также на умение решать задачи. Планируется, кроме того, осуществлять систематический (выборочный) контроль за работой студентов как на семинарах, так и на лекциях. Все контрольные проводятся в рамках расписания по следующему графику.

Предварительный график проведения основных тестов (контрольных работ)

Раздел I: тест-контрольная №1 – **24 марта** (консультация 21.III, $9^{\underline{00}}$, ауд. П-13)
Разделы II-III: тест-контрольная №2 – **28 апреля** (консультация 17.IV, $9^{\underline{00}}$, ауд. П-13)

Одной из форм самостоятельной работы является решение «трудных» задач, которое позволяет студентам глубже усвоить материал курса и набрать дополнительные к результатам контрольных баллы, повысив, тем самым, свою предварительную оценку к зачёту.

Важная особенность чтения данного курса в 2013-2014 учебном году связана с ускоренным характером прохождения материала в марте 2014 г. за счёт некоторых занятий по курсу «Элементы теории дискретных управляющих систем». Часы этих занятий будут использоваться для чтения лекций по курсу «Основы кибернетики», проведения некоторых семинарских занятий, а также для консультаций.

Информационные объявления, а также данные о посещаемости и текущей успеваемости студентов вывешиваются на сайте по адресу:

http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(318, 418 группы)

[1] 1 час самостоятельной работы на 1 час аудиторных занятий.