# Лекция 8. Сеть. Поток в сети. Теорема о величине максимального потока в сети. Нахождение максимального потока в сети.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции: http://mk.cs.msu.ru → Спецкурсы → Графы и их приложения

# Транспортная задача

*Задана сеть из $p$ узлов, связанных направленными соединениями, среди которых выделены источник $s$ и сток $t$ $(s \neq t)$. По соединениям можно передавать данные, но на каждое соединение наложено ограничение — его максимально допустимая нагрузка. Необходимо определить* **максимально возможное** *количество данных, которое можно передать по этой сети из $s$ в $t$. Также требуется выяснить, как можно устроить передачу этого максимально возможного количества данных*.

Эту задачу можно рассматривать для сетей компьтеров и т. д., сетей железнодорожных, автомобильных и т. д. дорог; сетей трубопроводов и т. д.

# Входящие и исходящие дуги вершины

Пусть $G = (V, E)$ — орграф.

Для каждой вершины $v \in V$ определим множества $A(v)$ и $B(v)$:

$$A(v) = \{e \in E \mid e = (v, w), w \in V\},$$

т. е. $A(v)$ — множество всех дуг, исходящих из вершины $v$ в графе $G$;

$$B(v) = \{e \in E \mid e = (w, v), w \in V\},$$

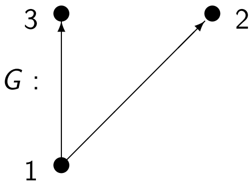
т. е. $B(v)$ — множество всех дуг, входящих в вершину $v$ в графе $G$.

# Источники и стоки

Если $B(v) = \emptyset$, т. е. в вершину $v$ дуги не входят, то вершина $v$ называется **источником**.

Если $A(v) = \emptyset$, т. е. из вершины $v$ дуги не исходят, то вершина $v$ называется **стоком**.

Например, в графе $G$ вершина 1 является источником, вершины 2 и 3 — стоками.



# Сеть

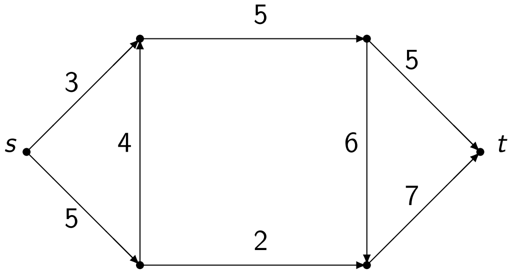
Пусть $G = (V, E)$ — орграф с одним источником $s \in V$ и одним стоком $t \in V$, где $s \neq t$.

**Сетью** $S = (G; c)$ назовем орграф $G$ с заданной функцией $c : E \to \mathbb{R}_+$, сопоставляющей каждой дуге $e \in E$ неотрицательное действительное число $c(e)$, называющееся **пропускной способностью** этой дуги $e$.

# Пример сети

Сеть $S = (G; c)$:

$S$ :



# Поток в сети

**Потоком** в сети $S = (G; c)$, где $G = (V, E)$, называется такая функция $f : E \to \mathbb{R}_+$, приписывающая каждой дуге $e \in E$ неотрицательное число $f(e)$, называемое **потоком** по этой дуге $e$, для которой выполняются свойства:

1) для каждой дуги $e \in E$ верно $f(e) \leqslant c(e)$, т. е. поток по любой дуге не превышает пропускную способность этой дуги;

2) для каждой вершины $v \in V$, $v \neq s, t$, верно

$$D_f(v) = \sum_{e \in A(v)} f(e) - \sum_{e \in B(v)} f(e) = 0,$$

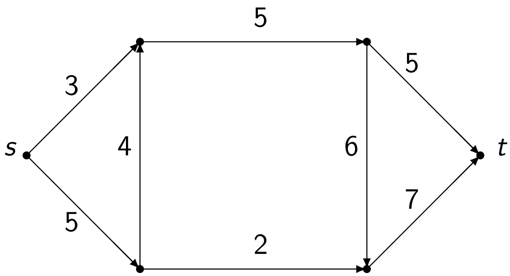
т. е. поток, входящий в любую вершину, кроме источника и стока, без остатка выходит из нее (сохранение потока).

При этом неотрицательное число $p_f = \sum_{e \in A(s)} f(e)$ называется **величиной потока** $f$.

# Пример потока в сети

Поток $f_1$ в сети $S = (G; c)$:

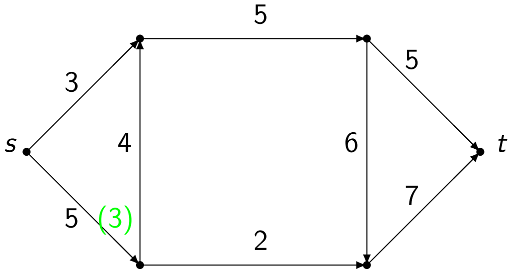
$S:$



# Пример потока в сети

Поток $f_1$ в сети $S = (G; c)$:

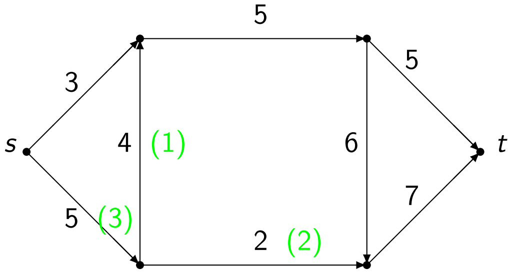
$S:$



# Пример потока в сети

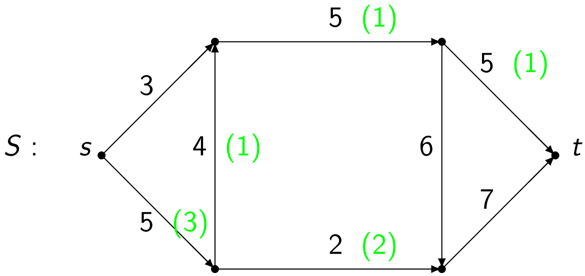
Поток $f_1$ в сети $S = (G; c)$:

$S:$



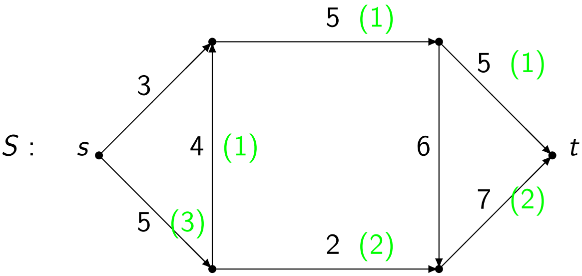
# Пример потока в сети

Поток $f_1$ в сети $S = (G; c)$:



# Пример потока в сети

Поток $f_1$ в сети $S = (G; c)$:

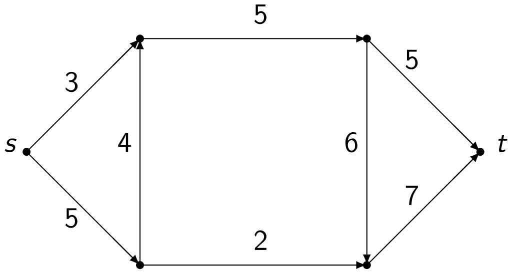



Получаем: $p_{f_1} = 3$.

## Пример потока в сети

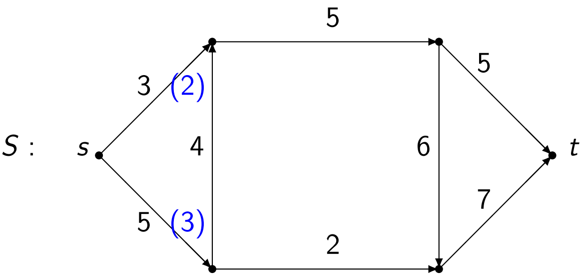
Можно построить другой поток $f_2$ в этой же сети $S = (G; c)$:

$S$ :



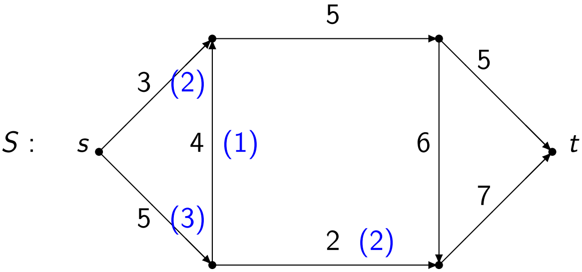
# Пример потока в сети

Можно построить другой поток $f_2$ в этой же сети $S = (G; c)$:



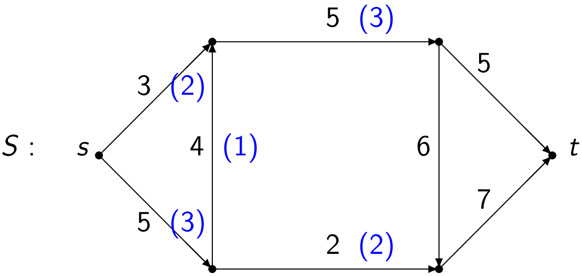
# Пример потока в сети

Можно построить другой поток $f_2$ в этой же сети $S = (G; c)$:



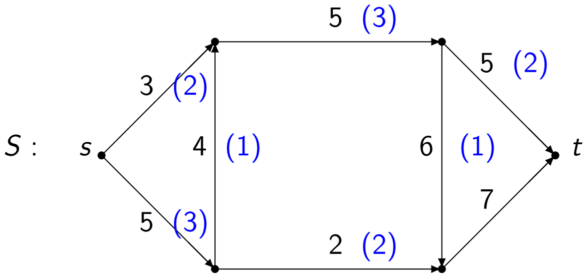
# Пример потока в сети

Можно построить другой поток $f_2$ в этой же сети $S = (G; c)$:



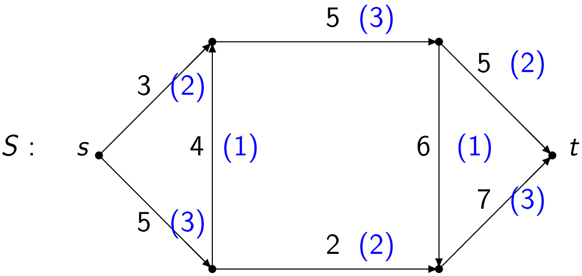
# Пример потока в сети

Можно построить другой поток $f_2$ в этой же сети $S = (G; c)$:



# Пример потока в сети

Можно построить другой поток $f_2$ в этой же сети $S = (G; c)$:

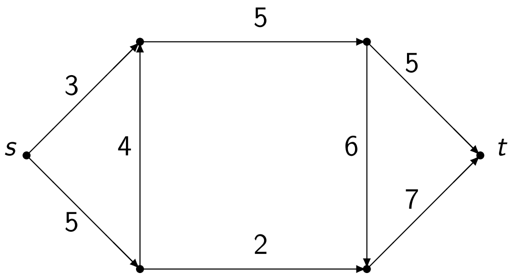



Получаем: $p_{f_2} = 5$.

# Пример потока в сети

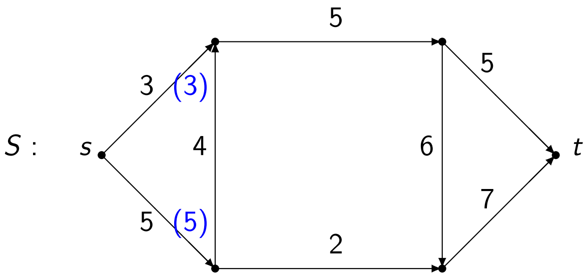
Попытаемся построить поток $f_3$ в этой же сети $S = (G; c)$:

$S$ :



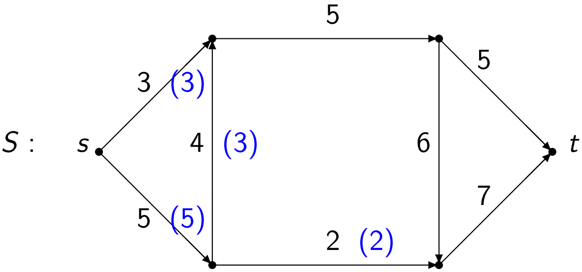
# Пример потока в сети

Попытаемся построить поток $f_3$ в этой же сети $S = (G; c)$:



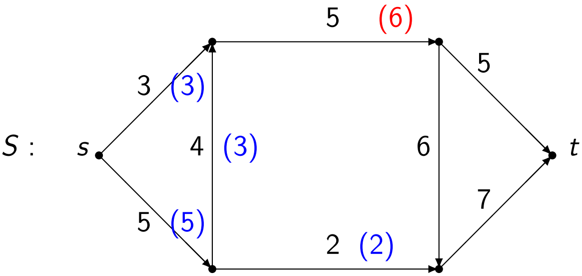
# Пример потока в сети

Попытаемся построить поток $f_3$ в этой же сети $S = (G; c)$:



# Пример потока в сети

Попытаемся построить поток $f_3$ в этой же сети $S = (G; c)$:




Поток $f_3$ с $p_{f_3} = 8$ построить не удалось.

## Постановка транспортной задачи

Задана сеть $S = (G; c)$.

Требуется найти **максимальный поток** $f$ в сети $S$, т. е. такой поток, при котором достигается наибольшее значение величины потока среди всех потоков этой сети.

# Разрез

Пусть $S = (G; c)$ — сеть, где $G = (V, E)$.

Если $X \subseteq V$, $s \in X$, $t \notin X$ и $Y = V \setminus X$, то

$$R = \{e \in E \mid e = (v, w), v \in X, w \in Y\},$$

называется **разрезом** сети $S$ и обозначается $R = (X, Y)$.

Если удалить из сети $S$ все дуги разреза $R$, то останется сеть, в которой нет ни одного направленного пути из $s$ в $t$.

# Пропускная способность разреза

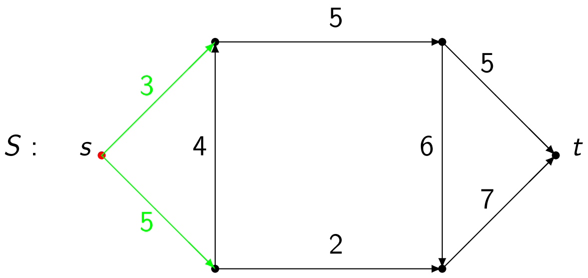
**Пропускной способностью разреза** $R(X, Y)$ называется неотрицательное число

$$c(R) = \sum_{e \in R} c(e),$$

т. е. равное сумме пропускных способностей его дуг.

# Пример разреза

Рассмотрим разрез $R_1 = (X_1, Y_1)$ в сети $S$, где $X_1 = \{s\}$:

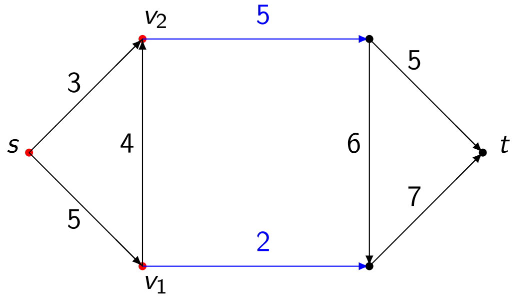



Получаем: $c(R_1) = 5 + 3 = 8$.

# Пример разреза

Рассмотрим разрез $R_2 = (X_2, Y_2)$ в сети $S$, где $X_2 = \{s, v_1, v_2\}$:

$S$ :




Получаем: $c(R_2) = 2 + 5 = 7$.

# Лемма о величине потока в сети

**Лемма 1 (о величине потока в сети).** *Пусть $S = (G; c)$ — сеть, где $G = (V, E)$. Величина любого потока в сети $S$ не превосходит пропускной способности любого ее разреза.*

**Доказательство.** Пусть $f : E \to \mathbb{R}_+$ — произвольный поток в сети $S$, а $R = (X, Y)$ — произвольный ее разрез, где $X \subseteq V$, $s \in X$, $t \notin X$, $Y = V \setminus X$.

# Лемма о величине потока в сети

**Доказательство**. По определению

$$p_f = \sum_{e \in A(s)} f(e) - \sum_{e \in B(s) = \emptyset} f(e).$$

В промежуточных вершинах поток не остается, поэтому эту сумму можно добавить все вершины из $X$ ($t \notin X$):

$$\begin{aligned} p_f &= \sum_{v \in X} \left( \sum_{e \in A(v)} f(e) - \sum_{e \in B(v)} f(e) \right) = \\ &= \sum_{v \in X, (v,w) \in A(v)} f(v, w) - \sum_{v \in X, (w,v) \in B(v)} f(w, v). \end{aligned}$$

# Лемма о величине потока в сети

**Доказательство**. Если $v, w \in X$, то $f(v, w)$ в полученной сумме встречается и со знаком «+», и со знаком «-». Поэтому ненулевой вклад вносят потоки по дугам, в которых одна из вершин лежит в $X$, а другая вершина — в $Y$. Значит,

$$\begin{aligned} p_f &= \sum_{v\in X, w\in Y, (v,w)\in E} f(v, w) - \sum_{v\in X, w\in Y, (w,v)\in E} f(w, v) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{v\in X, w\in Y, (v,w)\in E} f(v, w) \leqslant \sum_{v\in X, w\in Y, (v,w)\in E} c(v, w) = c(R). \end{aligned}$$

Поэтому $p_f \leqslant c(R)$.

$\square$

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Теорема 1 (Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон, 1962).** *Пусть* $S = (G; c)$ *— сеть, где* $G = (V, E)$*. Величина максимального потока* $p_{max}$ *в сети* $S$ *совпадает с минимальной пропускной способностью* $r_{min}$ *ее разрезов.*

**Доказательство**. Пусть $R_{min} = (X, Y)$ — разрез сети $S$ с минимальной пропускной способностью $c(R_{min}) = r_{min}$ и $f : E \to \mathbb{R}_+$ — поток в сети $S$ с максимальной величиной $p_f = p_{max}$.

По лемме 1 выполняется $p_f \leqslant c(R_{min})$.

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство**. Покажем, что $p_f = c(R_{min})$.

По индукции определим множество вершин $X \subseteq V$.
*Базис индукции*: $s \in X$.
*Индуктивный переход*:
1) если $v \in X$, $(v, w) \in E$ и $f(v, w) < c(v, w)$, то $w \in X$;
2) если $v \in X$, $(w, v) \in E$ и $f(w, v) > 0$, то $w \in X$.

Т. е. $X$ — множество вершин, в которые можно перейти из источника $s$ по прямым дугам с ненасыщенным потоком (т. е. который меньше пропускной способности этой дуги) и по обратным дугам с ненулевым потоком. Положим $Y = V \setminus X$.

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство**. 1. Если $t \notin X$, то $R = (X, Y)$ — разрез.
Тогда по доказательству леммы 1:

$$p_f = \sum_{v \in X, w \in Y, (v,w) \in E} f(v, w) - \sum_{v \in X, w \in Y, (w,v) \in E} f(w, v).$$

Но если $v \in X$, $w \in Y$ и $(v, w) \in E$, то $f(v, w) = c(v, w)$, т. к. иначе вершину $w$ добавили бы в $X$.
Также если $v \in X$, $w \in Y$ и $(w, v) \in E$, то $f(w, v) = 0$, т. к. иначе вершину $w$ добавили бы в $X$.

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство.** Поэтому

$$p_f = \sum_{v \in X, w \in Y, (v,w) \in E} c(v, w) = c(R).$$

Из $c(R_{min}) \leqslant c(R)$ и $p_f \leqslant c(R_{min})$ получаем $p_f = c(R_{min})$.

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство**. 2. Если $t \in X$, то в $S$ найдется путь $P$ (без учета направлений дуг) из $s$ в $t$, состоящий только из прямых дуг с *ненасыщенным* потоком и из обратных дуг с *ненулевым* потоком:

$$P = se_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{m-1} e_m t,$$

где для каждого $j = 1, \ldots, m$ выполняется:

1) если $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$, то $f(e_j) < c(e_j)$;
2) если $e_j = (v_j, v_{j-1}) \in E$, то $f(e_j) > 0$.

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство**. Положим:

$$\begin{aligned} a &= \min_{e_j=(v_{j-1},v_j)\in E}(c(e_j)-f(e_j)); \\ b &= \min_{e_j=(v_j,v_{j-1})\in E} f(e_j); \\ d &= \min(a,b). \end{aligned}$$

Отметим, что $d > 0$.

# Теорема Форда, Фалкерсона

**Доказательство.** Теперь построим новый поток $f'$ в сети $S$, изменив потоки по дугам пути $P$: для каждого $j = 1, \dots, m$ положим:

1) если $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$, то $f'(e_j) = f(e_j) + d$;
2) если $e_j = (v_j, v_{j-1}) \in E$, то $f'(e_j) = f(e_j) - d$.

Получаем: $p_{f'} = p_f + d > p_{max}$, чего не может быть. Значит, случай 2 не возможен, выполняется случай 1 и $p_f = p_{max} = c(R_{min})$.

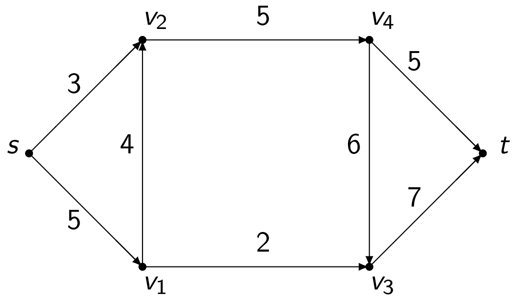
□

# Алгоритм расстановки пометок

По доказательству теоремы 1 можно описать алгоритм построения максимального потока в сети. Он называется **алгоритмом расстановки пометок**.

Рассмотрим сеть $S$, и пусть $f_0$ — нулевой поток.

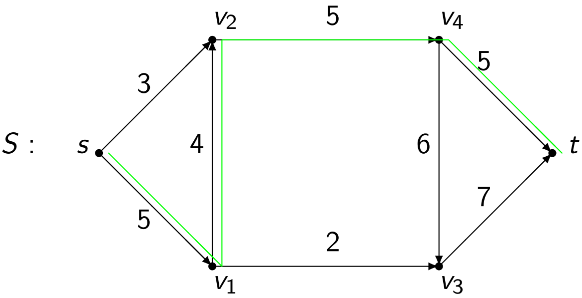
$S$ :



# Алгоритм расстановки пометок

По доказательству теоремы 1 можно описать алгоритм построения максимального потока в сети. Он называется **алгоритмом расстановки пометок**.

Рассмотрим сеть $S$, и пусть $f_0$ — нулевой поток.



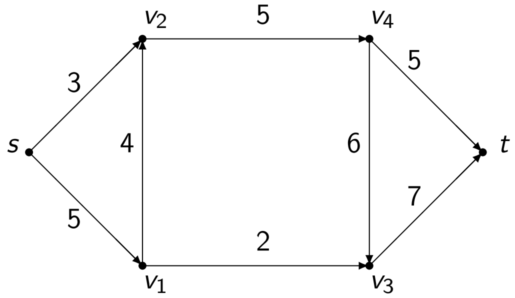
# Алгоритм расстановки пометок

Нашли путь:

$$P_1 = s(s, v_1)v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем: $d = a = \min(5, 4, 5, 5) = 4$, и поток $f_0$ можно увеличить до нового потока $f_1$, $p_{f_1} = 4$.

$S$ :



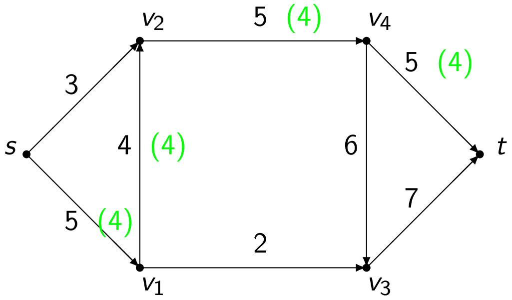
# Алгоритм расстановки пометок

Нашли путь:

$$P_1 = s(s, v_1)v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем: $d = a = \min(5, 4, 5, 5) = 4$, и поток $f_0$ можно увеличить до нового потока $f_1$, $p_{f_1} = 4$.

$S$ :



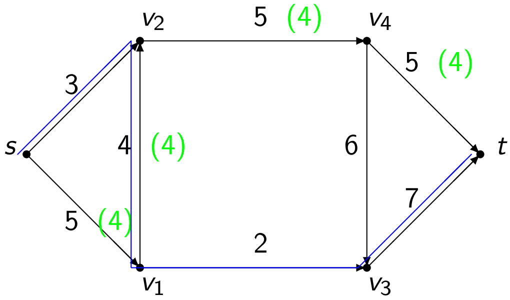
# Алгоритм расстановки пометок

Нашли путь:

$$P_1 = s(s, v_1)v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем: $d = a = \min(5, 4, 5, 5) = 4$, и поток $f_0$ можно увеличить до нового потока $f_1$, $p_{f_1} = 4$.

$S:$



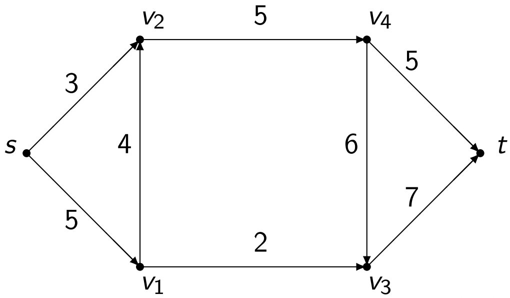
# Алгоритм расстановки пометок

Нашли новый путь:

$$P_2 = s(s, v_2)v_2(v_1, v_2)v_1(v_1, v_3)v_3(v_3, t)t.$$

Получаем: $a = \min(3, 2, 7) = 2$, $b = \min(4) = 4$, $d = \min(2, 4) = 2$, и поток $f_1$ можно увеличить до нового потока $f_2$, $p_{f_2} = 4 + 2 = 6$.

$S :$

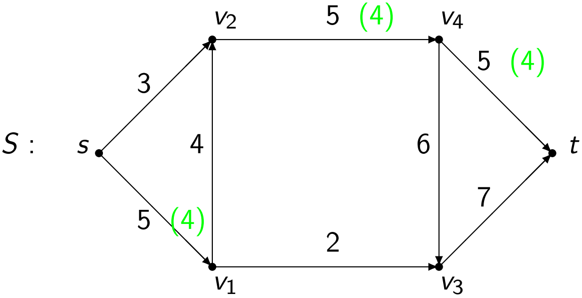


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли новый путь:

$$P_2 = s(s, v_2)v_2(v_1, v_2)v_1(v_1, v_3)v_3(v_3, t)t.$$

Получаем: $a = \min(3, 2, 7) = 2$, $b = \min(4) = 4$, $d = \min(2, 4) = 2$, и поток $f_1$ можно увеличить до нового потока $f_2$, $p_{f_2} = 4 + 2 = 6$.

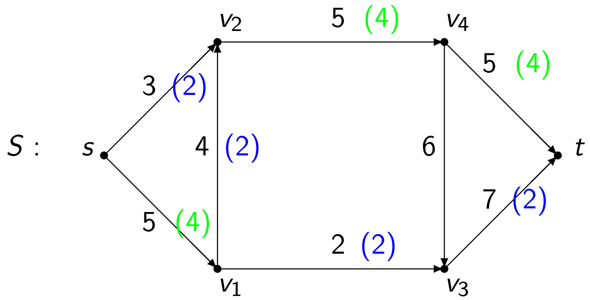


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли новый путь:

$$P_2 = s(s, v_2)v_2(v_1, v_2)v_1(v_1, v_3)v_3(v_3, t)t.$$

Получаем: $a = \min(3, 2, 7) = 2$, $b = \min(4) = 4$, $d = \min(2, 4) = 2$, и поток $f_1$ можно увеличить до нового потока $f_2$, $p_{f_2} = 4 + 2 = 6$.

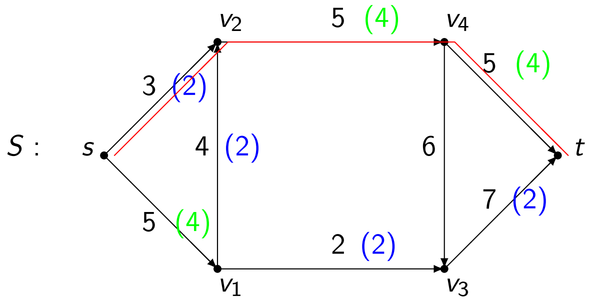


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли новый путь:

$$P_2 = s(s, v_2)v_2(v_1, v_2)v_1(v_1, v_3)v_3(v_3, t)t.$$

Получаем: $a = \min(3, 2, 7) = 2$, $b = \min(4) = 4$, $d = \min(2, 4) = 2$, и поток $f_1$ можно увеличить до нового потока $f_2$, $p_{f_2} = 4 + 2 = 6$.



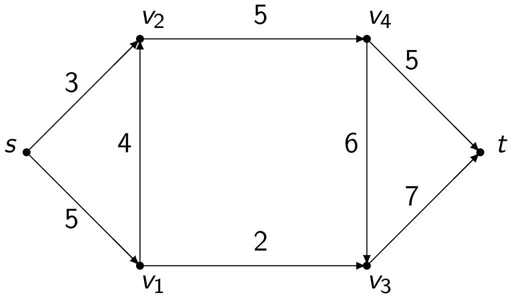
# Алгоритм расстановки пометок

Нашли еще один путь:

$$P_3 = s(s, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем: $d = a = \min(1, 1, 1) = 1$, и поток $f_2$ можно увеличить до нового потока $f_3$, $p_{f_3} = 6 + 1 = 7$.

$S$ :

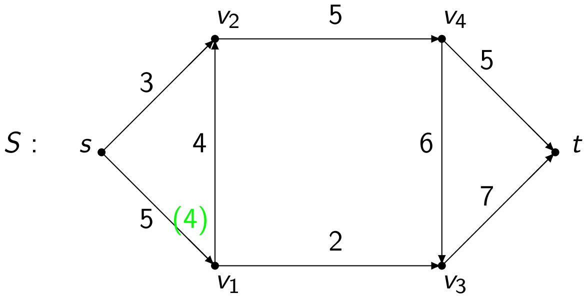


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли еще один путь:

$$P_3 = s(s, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем: $d = a = \min(1, 1, 1) = 1$, и поток $f_2$ можно увеличить до нового потока $f_3$, $p_{f_3} = 6 + 1 = 7$.

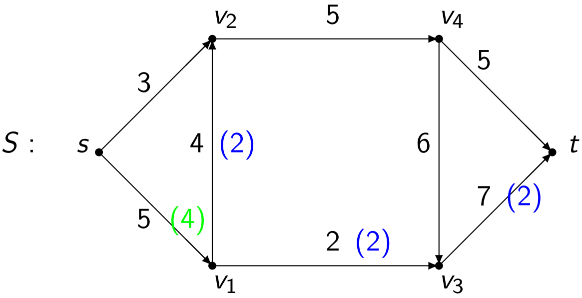


# Алгоритм расстановки пометок

Нашли еще один путь:

$$P_3 = s(s, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

Получаем: $d = a = \min(1, 1, 1) = 1$, и поток $f_2$ можно увеличить до нового потока $f_3$, $p_{f_3} = 6 + 1 = 7$.



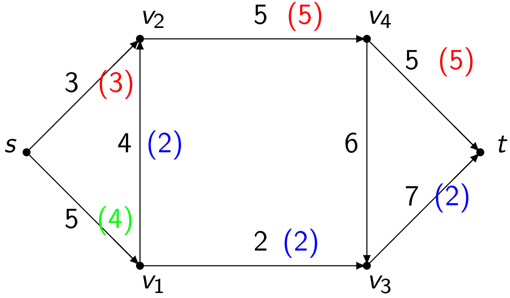
# Алгоритм расстановки пометок

Нашли еще один путь:

$$P_3 = s(s, v_2)v_2(v_2, v_4)v_4(v_4, t)t.$$

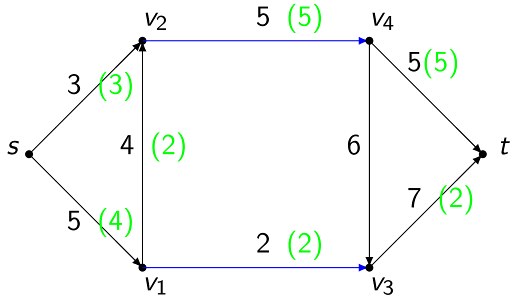
Получаем: $d = a = \min(1, 1, 1) = 1$, и поток $f_2$ можно увеличить до нового потока $f_3$, $p_{f_3} = 6 + 1 = 7$.

$S$ :



# Алгоритм расстановки пометок

$S$ :




Находим: $X = \{s, v_1, v_2\}$, $t \notin X$.
Тогда $R = (X, V \setminus X)$ — разрез, $c(R) = 2 + 5 = 7$, $R = R_{min}$.
Поэтому $p_{max} = p_{f_3} = c(R_{min}) = 7$.

# Краткий итог лекции

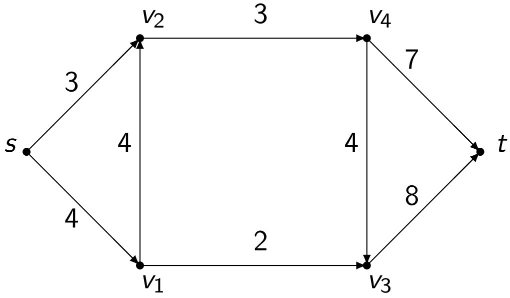
1. Величина максимального потока в сети совпадает с минимальной пропускной способностью среди разрезов этой сети.

2. Максимальный поток в сети можно найти быстрым (полиномиальным) алгоритмом.

# Задачи

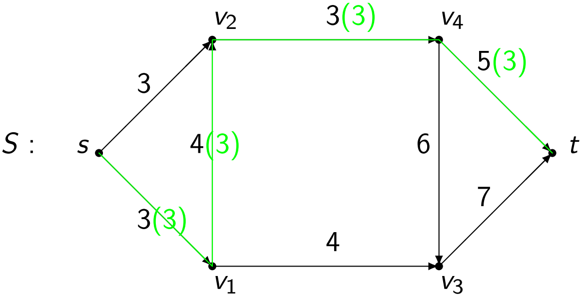
**1**. Начиная с нулевого потока, найти максимальный поток в сети $S$ по алгоритму расстановки пометок.

$S:$



# Задачи

**2**. В сети $S$ увеличить поток, выделенный зеленым цветом, до максимального потока при помощи алгоритма расстановки пометок:



# Задачи

**3**. Пусть $G = (V, E)$ — связный двудольный граф. Множество ребер $P$, $P \subseteq E$, называется **паросочетанием** в графе $G$, если никакие два различных ребра из $P$ не содержат общей вершины. Паросочетание $P$ называется **максимальным**, если оно содержит наибольшее число ребер среди всех паросочетаний графа $G$.

Показать, как можно свести задачу о нахождении максимального паросочетания в связном двудольном графе $G$ к задаче поиска максимального потока в сети.

## Литература к лекции

**1**. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

**2**. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. С. 136–154.

**3**. Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У. Алгоритмы. М.: МЦНМО, 2014. С. 193–200.

Конец лекции