# Математическая логика и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2015, весенний семестр

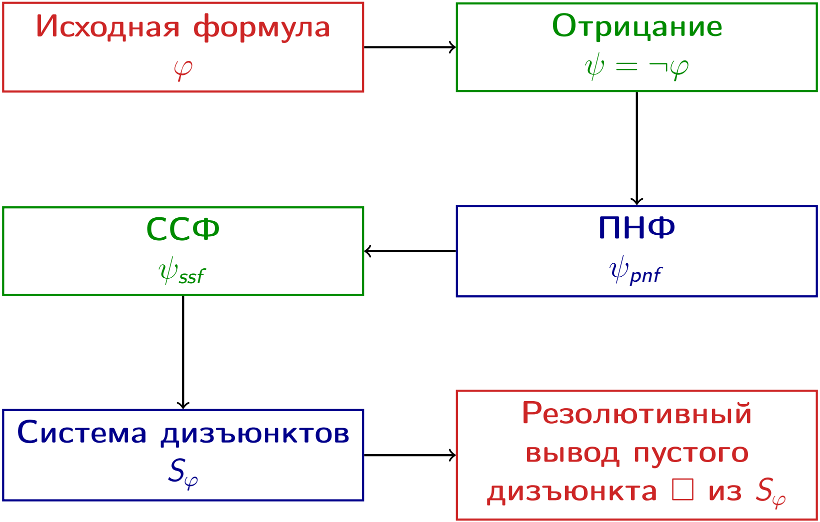
# Лекция 9

Резолютивный вывод

Корректность резолютивного вывода

Применение метода резолюций

# Общая схема метода резолюций



# Общая схема метода резолюций

# Резолютивный вывод

Сначала введём ещё немного терминов

Пусть $E$ — выражение и $\theta$ — подстановка

Тогда:

- $E\theta$ — пример выражения $E$
- если $Var_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример выражения $E$
- если $\theta : Var \to Var$ — биекция, то $\theta$ — переименование
- если $\theta$ — переименование, то $E\theta$ — вариант выражения $E$

# Резолютивный вывод

## Например

- $\{x/u, y/z, u/x, z/y\}$ — переименование
- $\varepsilon = \{\}$ — тоже переименование

Пусть $E = P(x, f(y)) \vee \neg R(y, c)$

Тогда:

- $E' = P(g(d), f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — пример выражения $E$:
$$E' = E\{x/g(d), y/z\}$$
- $E'' = P(g(d), f(c)) \vee \neg R(c, c)$ — основной пример выражения $E$:
$$E'' = E\{x/g(d), y/c\}, \qquad Var_{E''} = \emptyset$$
- $E''' = P(u, f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — вариант выражения $E$:
$$E'' = E\theta, \text{ где } \theta = \{x/u, y/z\} \text{ — переименование}$$

# Резолютивный вывод

Пусть $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$ — дизъюнкты и $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

И ещё немного терминологии

- $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента дизъюнктов $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$
- литеры $L_1$ и $\neg L_2$ образуют контрарную пару

# Резолютивный вывод

## Пример применения правила резолюции

$$P(x, f(y)) \quad \vee \quad \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1}$$

$$\underbrace{Q(x) \quad \vee \quad R(y,x)}_{D_2} \quad \vee \quad \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара: $P(x, f(y))$ и $\neg P(g(z,y), z)$

НОУ$(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$

$$\begin{cases} x = g(z,y) \\ f(y) = z \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \begin{cases} x = g(f(y), y) \\ z = f(y) \end{cases}$$

# Резолютивный вывод

## Пример применения правила резолюции

$$P(x, f(y)) \quad \vee \quad \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D_1}$$

$$\underbrace{Q(x) \quad \vee \quad R(y, x)}_{D_2} \quad \vee \quad \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара: $P(x, f(y))$ и $\neg P(g(z, y), z)$

НОУ$(P(x, f(y)), P(g(z, y), z)) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$

Резольвента:

$$( \quad \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D_1} \quad \vee \quad \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D_2} \quad )\theta$$

$$\neg R(g(g(f(y), y), f(y)), f(f(y))) \vee Q(g(f(y), y)) \vee R(y, g(f(y), y))$$

# Резолютивный вывод

## Пример применения правила резолюции

$$\underbrace{P(x, f(y))}_{D_1} \quad \vee \quad \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$\underbrace{Q(x)}_{D_2} \quad \vee \quad R(y,x) \quad \vee \quad \underbrace{\neg P(g(z,y), z)}_{D_2}$$

Другая возможная контрарная пара: $\neg R(g(x,z), f(z))$ и $R(y,x)$

НОУ$(\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)) = \theta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\}$

$$\begin{cases} g(x,z) = y \\ f(z) = x \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \begin{cases} y = g(f(z), z) \\ x = f(z) \end{cases}$$

# Резолютивный вывод

## Пример применения правила резолюции

$$\underbrace{P(x, f(y))}_{D_1} \quad \vee \quad \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$\underbrace{Q(x)}_{D_2} \quad \vee \quad R(y,x) \quad \vee \quad \underbrace{\neg P(g(z,y), z)}_{D_2}$$

Другая возможная контрарная пара: $\neg R(g(x,z), f(z))$ и $R(y,x)$

НОУ$(\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)) = \theta = \{x/f(z), y/g(f(z),z)\}$

Резольвента:

$$(\quad \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1} \quad \vee \quad \underbrace{Q(x) \vee \neg P(g(z,y), z)}_{D_2} \quad)\theta$$

$$P(f(z), f(g(f(z),z))) \vee Q(f(z)) \vee \neg P(g(z, g(f(z),z)), z)$$

# Резолютивный вывод

Достаточно ли правила резолюции для выявления всех противоречий?

Оказывается, что нет:

$$P(c) \vee P(c)$$
$$\neg P(c) \vee \neg P(c)$$

Система из таких двух дизъюнктов противоречива, но если применять только правило резолюции, то мы будем получать или общезначимые дизъюнкты, или те, что были изначально

Чтобы уметь работать с такими системами, нужно нечто большее, чем правило резолюции

# Резолютивный вывод

Пусть $D \vee L_1 \vee L_2$ — дизъюнкт и $\theta \in$ НОУ$(L_1, L_2)$

Правило склейки:

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

И ещё немного терминологии:

- $(D \vee L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$
- литеры $L_1$ и $L_2$ образуют склеиваемую пару

# Резолютивный вывод

## Пример применения правила склейки

$$\underbrace{P(x)}_{D} \vee \neg R(y,z,f(x)) \vee \neg R(x,f(c),z)$$

Возможная склеиваемая пара: $\neg R(y,z,f(x))$, $\neg R(x,f(c),z)$

НОУ$(R(y,z,f(x)), R(x,f(c),z)) = \theta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$

$$\begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases} \xrightarrow{(1),(3),(5)} \begin{cases} y = c \\ z = f(c) \\ x = c \end{cases}$$

Склейка:

$$(\underbrace{P(x)}_{D} \vee \neg R(y,z,f(x)))\theta$$

$$P(c) \vee \neg R(c,f(c),f(c))$$

# Резолютивный вывод

## Как же выглядит резолютивный вывод?

Пусть $S = \{D_1, \dots, D_n\}$ — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из системы $S$ — это конечная последовательность дизъюнктов

$$D'_1, \dots, D'_i, \dots, D'_k,$$

в которой для каждого дизъюнкта $D'_i$ верно одно из условий:

1. $D'_i$ — вариант некоторого дизъюнкта из $S$
2. $D'_i$ — резольвента дизъюнктов $D'_p$, $D'_q$, где $p, q < i$
3. $D'_i$ — склейка дизъюнкта $D'_p$, где $p < i$

Дизъюнкты $D'_1, \dots, D'_k$ резолютивно выводимы из $S$

# Резолютивный вывод

## Пример резолютивного вывода

$$S = \{D_1, D_2, D_3\}, \text{ где}$$

$D_1 = P(x, f(y)) \vee R(y)$
$D_2 = \neg R(y)$
$D_3 = \neg P(f(x), z) \vee \neg P(y, y)$

Резолютивный вывод:

1. $D_1' = P(x_1, f(y_1)) \vee R(y_1)$ — вариант дизъюнкта $D_1$
2. $D_2' = \neg R(y_2)$ — вариант дизъюнкта $D_2$
3. $D_3' = P(x_3, f(y_3))$ — резольвента дизъюнктов $D_1'$, $D_2'$
4. $D_4' = \neg P(f(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$ — вариант дизъюнкта $D_3$
5. $D_5' = \neg P(f(x_5), f(x_5))$ — склейка дизъюнкта $D_4'$
6. $D_6' = ???$ — резольвента дизъюнктов $D_3'$ и $D_5'$

# Резолютивный вывод

## Пример резолютивного вывода

$$S = \{D_1, D_2, D_3\}, \text{ где}$$

$D_1 = P(x, f(y)) \lor R(y)$
$D_2 = \neg R(y)$
$D_3 = \neg P(f(x), z) \lor \neg P(y, y)$

## Резолютивный вывод:

1. $D_1' = P(x_1, f(y_1)) \lor R(y_1)$ — вариант дизъюнкта $D_1$
2. $D_2' = \neg R(y_2)$ — вариант дизъюнкта $D_2$
3. $D_3' = P(x_3, f(y_3))$ — резольвента дизъюнктов $D_1'$, $D_2'$
4. $D_4' = \neg P(f(x_4), z_4) \lor \neg P(y_4, y_4)$ — вариант дизъюнкта $D_3$
5. $D_5' = \neg P(f(x_5), f(x_5))$ — склейка дизъюнкта $D_4'$
6. $D_6' = \square$ — резольвента дизъюнктов $D_3'$ и $D_5'$

Здесь $\square$ — пустой дизъюнкт, **тождественная ложь**

# Резолютивный вывод

Ещё раз о том, почему же $\square$ — это тождественная ложь

Дизъюнкт $\square$ — это резольвента дизъюнктов двух литер: $L_1$, $\neg L_2$

При этом

- $L_1 \equiv L_1 \vee \textbf{false}$
- $\neg L_2 \equiv \neg L_2 \vee \textbf{false}$

Тогда их резольвента — это $(\textbf{false} \vee \textbf{false})\theta$, то есть **false** — тождественная ложь

Откуда такое название — “пустой дизъюнкт”?

Он не содержит ни одной литеры — иначе говоря, множество литер этого дизъюнкта пусто

# Резолютивный вывод

Если это было не достаточно заметно, то отметим здесь отдельно:

при построении вывода переменные дизъюнктов постоянно **переименовывались**, и в каждом дизъюнкте оказывалась **индивидуальная** система переменных

1. $P(x_1, f(y_1)) \vee R(y_1)$
2. $\neg R(y_2)$
3. $P(x_3, f(y_3))$
4. $\neg P(f(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$
5. $\neg P(f(x_5), f(x_5))$
6. $\Box$

Зачем это делалось?

# Резолютивный вывод

Вспомним изначальное определение дизъюнкта:

это замкнутая формула вида $\forall x_1 \dots \forall x_n (L_1 \vee \dots \vee L_m)$

Поэтому:

- переменные можно переименовывать: $\forall x \varphi(x) \equiv \forall y \varphi(y)$, если ...
- если их не переименовывать, то из-за совпадения названий переменных резольвенты может не оказаться

Например: $S = \{\neg P(x), P(f(x))\}$

1. $D_1' = \neg P(x)$
2. $D_2' = P(f(x))$
3. НОУ$(P(x), P(f(x))) = \emptyset$ — у $D_1'$, $D_2'$ нет резольвенты

# Резолютивный вывод

Вспомним изначальное определение дизъюнкта:

это замкнутая формула вида $\forall x_1 \dots \forall x_n (L_1 \vee \dots \vee L_m)$

Поэтому:

- переменные можно переименовывать: $\forall x \varphi(x) \equiv \forall y \varphi(y)$, если ...
- если их не переименовывать, то из-за совпадения названий переменных резольвенты может не оказаться

Например: $S = \{\neg P(x), P(f(x))\}$

1. $D_1'' = \neg P(x_1)$
2. $D_2'' = P(f(x_2))$
3. $\square$ — резольвента дизъюнктов $D_1''$, $D_2''$

Поэтому рекомендуется следовать простому правилу:

новый дизъюнкт — новые переменные

# Резолютивный вывод

Какие резолютивные выводы нас интересуют?

Успешный резолютивный вывод (или резолютивное опровержение) — это вывод, оканчивающийся пустым дизъюнктом $\square$

Почему этот вывод “успешен”, и где же здесь “опровержение”?

Успешный вывод — это свидетельство **невыполнимости** системы дизъюнктов, и опровергнуто предположение о её выполнимости

Но на этот счёт нужна какая-нибудь теорема

# Корректность резолютивного вывода

**Теорема корректности резолютивного вывода**

**Если из системы дизъюнктов $S$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт, то $S$ — противоречивая система**

Доказательство теоремы.

1. Известно, что пустой дизъюнкт не имеет модели (тождественно ложен)
2. Покажем, что любой дизъюнкт, резолютивно выводимый из $S$, является логическим следствием $S$

Тогда получим: $S \models \square$ — а значит, будет показано, что система $S$ не имеет модели, то есть противоречива

Для этого докажем две леммы: по одной на каждое правило вывода

После доказательства этих лемм теорема будет считаться доказанной

# Корректность резолютивного вывода

**Лемма 1 (корректость правила резолюции)**

**Если $D$ — резольвента дизъюнктов $D_1$, $D_2$, то $D_1, D_2 \models D$**

Доказательство леммы 1.

$D_1 = D_1' \vee L_1$, $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$, НОУ$(D_1, D_2) \neq \emptyset$, $\theta \in$ НОУ$(L_1, L_2)$,
$D = (D_1' \vee D_2')\theta$

Имеем: $L_1\theta = L_2\theta = L$

Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{array}{rl}
D_1, D_2 \models D_1\theta & \qquad D_1, D_2 \models D_2\theta \\
D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L_1\theta & \qquad D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_2\theta \\
D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L & \qquad D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L \\
D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee L & \qquad D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee \neg L
\end{array}$$

Теперь заметим (очевидно?), что:

$$\text{если } \Gamma \models A \vee B \text{ и } \Gamma \models A \vee \neg B, \text{ то } \Gamma \models A$$

Тогда $D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta$

То есть $D_1, D_2 \models D$

**конец доказательства леммы 1**

# Корректность резолютивного вывода

**Лемма 2 (корректность правила склейки)**

**Если $D$ — склейка дизъюнкта $D_1$, то $D_1 \models D$**

Доказательство леммы 2.

Очень похоже (то есть доказать самостоятельно)

**конец доказательства теоремы**

# Применение метода резолюций

Ещё раз вспоминаем, для решения какой задачи вводился весь этот аппарат

Рассмотрим такую формулу $\varphi$:

$$\forall x\ (\forall y \exists v \forall u\ ((A(u,v) \to B(y,u))\& \\ (\neg \exists w\ A(w,u) \to \forall z\ A(z,v))) \to \exists y\ B(x,y))$$

**Задача**: проверить общезначимость этой формулы

Решение: метод резолюций

# Применение метода резолюций

## Решение

Этап 1. Перейти к отрицанию: доказать, что формула $\psi = \neg\varphi$ противоречива

$$\psi = \neg\forall x\, (\forall y \exists v \forall u\, ((A(u,v) \to B(y,u)) \& (\neg\exists w\, A(w,u) \to \forall z\, A(z,v))) \to \exists y\, B(x,y))$$

# Применение метода резолюций

## Решение

Этап 2. Привести $\psi$ к предварённой нормальной форме:

$$\psi \rightsquigarrow \psi_{pnf}$$

$$\neg\forall x\, (\forall y \exists v \forall u\, ((A(u,v) \to B(y,u))\& \\ (\neg\exists w\, A(w,u) \to \forall z\, A(z,v))) \to \exists y\, B(x,y))$$

# Применение метода резолюций

## Решение

Этап 2. Привести $\psi$ к предварённой нормальной форме:

$$\psi \rightsquigarrow \psi_{pnf}$$

а) переименование переменных

$$\neg\forall x\,(\forall y'\exists v\forall u\,((A(u,v) \to B(y',u))\&\\ (\neg\exists w\,A(w,u) \to \forall z\,A(z,v))) \to \exists y''\,B(x,y''))$$

# Применение метода резолюций

## Решение

Этап 2. Привести $\psi$ к предварённой нормальной форме:

$$\psi \rightsquigarrow \psi_{pnf}$$

б) удаление импликаций

$$\neg\forall x\,(\neg\forall y'\exists v\forall u\,((\neg A(u,v)\vee B(y',u))\&$$
$$(\neg\neg\exists w\,A(w,u)\vee\forall z\,A(z,v)))\vee\exists y''\,B(x,y''))$$

# Применение метода резолюций

## Решение

Этап 2. Привести $\psi$ к предварённой нормальной форме:

$$\psi \rightsquigarrow \psi_{pnf}$$

в) продвижение отрицаний

$$\exists x\ (\forall y' \exists v \forall u\ ((\neg A(u,v) \vee B(y',u))\& \\ (\exists w\ A(w,u) \vee \forall z\ A(z,v)))\& \forall y''\ \neg B(x,y''))$$

# Применение метода резолюций

## Решение

Этап 2. Привести $\psi$ к предварённой нормальной форме:

$$\psi \rightsquigarrow \psi_{pnf}$$

в) вынесение кванторов

$$\psi_{pnf} = \exists x \forall y' \exists v \forall u \exists w \forall z \forall y'' \left( \begin{array}{c} (\neg A(u, v) \vee B(y', u))\& \\ (A(w, u) \vee A(z, v))\& \\ \neg B(x, y'') \end{array} \right)$$

# Применение метода резолюций

## Решение

Этап 3. Привести $\psi_{pnf}$ к сколемовской стандартной форме:

$$\psi_{pnf} \rightsquigarrow \psi_{ssf}$$

$$\psi_{ssf} = \quad \forall y' \quad \forall u \quad \forall z \forall y'' \left( \begin{array}{c} (\neg A(u, f(y')) \vee B(y', u))\& \\ (A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')))\& \\ \neg B(c, y'') \end{array} \right)$$

# Применение метода резолюций

## Решение

Этап 4. По $\psi_{ssf}$ сформировать систему дизъюнктов $S_\varphi$

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u) \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')) \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

# Применение метода резолюций

## Решение

Этап 5. Резолютивный вывод $\square$ из $S_\varphi$

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u) \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')) \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y_1)) \vee B(y_1, u_1)$ (вариант $D_1$)
2. $D'_2 = A(g(y_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2))$ (вариант $D_2$)
3. $D'_3 = A(g(y_3, f(y_3)), f(y_3))$ (склейка $D'_2$)
4. $D'_4 = B(y_4, g(y_4, f(y_4)))$ (резольвента $D'_1$ и $D'_3$)
5. $D'_5 = \neg B(c, y_5)$ (вариант $D_3$)
6. $D'_6 = \square$ (резольвента $D'_4$ и $D'_5$)

# Применение метода резолюций

## Решение

### Какие выводы мы делаем?

Построен успешный резолютивный вывод из $S_\varphi$

Теорема корректности резолютивного вывода: система $S_\varphi$ противоречива

Безымянная теорема в лекции 6: формула $\psi_{ssf}$ противоречива

Теоремы о сколемовской стандартной форме и предварённой нормальной форме: формулы $\psi_{pnf}$ и $\psi = \neg\varphi$ противоречивы

Значит, формула $\varphi$ общезначима:

$$\models \varphi$$

# А что дальше?

Всё ли это, что следует знать про резолютивный вывод?

Для метода семантический таблиц были сформулированы две теоремы: корректности и полноты

А полон ли метод резолюций? То есть:

Пригоден ли метод резолюций для проверки общезначимости любых формул?

Более точно:

1. верно ли, что для любой общезначимой формулы $\varphi$ существует успешный резолютивный вывод из системы дизъюнктов $S_\varphi$
2. верно ли, что если формула $\varphi$ необщезначима, то мы сможем обнаружить невозможность построения успешного резолютивного вывода из системы дизъюнктов $S_\varphi$

Это будет обсуждаться на следующей лекции

# Конец лекции 9